Des distributions à la théorie statistique des champs

analyse fonctionnelle, EDP et intégrale fonctionnelle

Cours intégré et étendu, avec exemples, exercices corrigés

et notebook compagnon `optimiz-rs`

HFThot Research Lab

d'après F. Golse (POLY431, École polytechnique) et P. Simon (Théorie statistique des champs)

Juillet 2026

Comment travailler avec ce cours

Ce cours est né d'un double constat : les polycopiés de F. Golse (*Distributions, analyse de Fourier, EDP*) et de P. Simon (*Théorie statistique des champs*) sont d'excellentes références, mais ils sont *condensés* : les démonstrations vont vite, les exemples sont rares, et le lien entre l'analyse (distributions, Fourier) et la physique (intégrale fonctionnelle, diagrammes) n'est jamais explicité. Ce document reprend *tout* le contenu de ces deux cours en le développant systématiquement :

- chaque chapitre commence par une boîte **Prérequis / rappel** qui réénonce (avec démonstration quand elle est courte) tout ce qui est supposé connu ;
- chaque définition est suivie d'au moins trois exemples : un exemple mathématique pur, un exemple physique, et lorsque c'est naturel un exemple issu du traitement du signal ou de la finance quantitative ;
- chaque théorème est démontré *intégralement*, avec les étapes numérotées ; lorsqu'une démonstration dépasse le cadre du cours, elle est remplacée par un schéma de preuve honnêtement signalé et une référence précise ;
- chaque chapitre se termine par des **exercices corrigés** gradués ($\star$ direct, $\star\star$ intermédiaire, $\star\star\star$ approfondi) ;
- les boîtes **Au notebook compagnon** renvoient aux TD numériques du fichier `champs_distributions_l` (kernel `rhftlab`), qui utilisent la bibliothèque de calcul `optimiz-rs` (v2.0) : transformée de Fourier inverse (`fourier_invert`), solveur de Poisson (`poisson_2d_zero_boundary`), équation de Fokker–Planck (`fokker_planck_constant`), échantillonnage MCMC (`mcmc_sample`), mouvement brownien fractionnaire (`simulate_fbm`), exposant de Hurst (`estimate_hurst`), évolution différentielle (`differential_evolution`), etc.

Parcours conseillé. La partie A (chapitres 1–5) construit l'analyse des distributions à partir de zéro ; elle est indispensable et doit être travaillée linéairement. La partie B (chapitres 6–9) applique cet outillage aux quatre EDP fondamentales de la physique. La partie C (chapitres 10–15) est le cours de théorie statistique des champs proprement dit : elle réutilise *constamment* les parties A et B (la gaussienne du chapitre 5 devient l'intégrale gaussienne du chapitre 11, le noyau de la chaleur du chapitre 8 devient le propagateur euclidien du chapitre 13, la fonction de Green du chapitre 7 devient le propagateur libre des diagrammes de Feynman du chapitre 12). La partie D (chapitres 17–18) ouvre sur les symétries en physique (groupes, Noether, jauge, brisure spontanée — d'après le cours de J.-B. Zuber [19]) et sur la relativité restreinte avec l'électromagnétisme covariant (d'après le cours d'A. Comtet [20]) : elle réinvestit tous les outils des parties A–C. Chaque chapitre contient en outre une section « *Exemples physiques approfondis* » alimentée par ces deux cours et par *QED, QCD en pratique* [21] : c'est là que les notions abstraites deviennent des calculs de physique complets.