

Des distributions à la théorie statistique des champs

analyse fonctionnelle, EDP et intégrale fonctionnelle

Cours intégré et étendu, avec exemples, exercices corrigés

et notebook compagnon `optimiz-rs`

HFThot Research Lab

d'après F. Golse (POLY431, École polytechnique) et P. Simon (Théorie statistique des champs)

Juillet 2026

Comment travailler avec ce cours

Ce cours est né d'un double constat : les polycopiés de F. Golse (*Distributions, analyse de Fourier, EDP*) et de P. Simon (*Théorie statistique des champs*) sont d'excellentes références, mais ils sont *condensés* : les démonstrations vont vite, les exemples sont rares, et le lien entre l'analyse (distributions, Fourier) et la physique (intégrale fonctionnelle, diagrammes) n'est jamais explicité. Ce document reprend *tout* le contenu de ces deux cours en le développant systématiquement :

- chaque chapitre commence par une boîte **Prérequis / rappel** qui réénonce (avec démonstration quand elle est courte) tout ce qui est supposé connu ;
- chaque définition est suivie d'au moins trois exemples : un exemple mathématique pur, un exemple physique, et lorsque c'est naturel un exemple issu du traitement du signal ou de la finance quantitative ;
- chaque théorème est démontré *intégralement*, avec les étapes numérotées ; lorsqu'une démonstration dépasse le cadre du cours, elle est remplacée par un schéma de preuve honnêtement signalé et une référence précise ;
- chaque chapitre se termine par des **exercices corrigés** gradués (★ direct, ★★ intermédiaire, ★★★ approfondi) ;
- les boîtes **Au notebook compagnon** renvoient aux TD numériques du fichier `champs_distributions_1` (kernel `rhftlab`), qui utilisent la bibliothèque de calcul `optimiz-rs` (v2.0) : transformée de Fourier inverse (`fourier_invert`), solveur de Poisson (`poisson_2d_zero_boundary`), équation de Fokker–Planck (`fokker_planck_constant`), échantillonnage MCMC (`mcmc_sample`), mouvement brownien fractionnaire (`simulate_fbm`), exposant de Hurst (`estimate_hurst`), évolution différentielle (`differential_evolution`), etc.

Parcours conseillé. La partie A (chapitres 1–5) construit l'analyse des distributions à partir de zéro ; elle est indispensable et doit être travaillée linéairement. La partie B (chapitres 6–9) applique cet outillage aux quatre EDP fondamentales de la physique. La partie C (chapitres 10–15) est le cours de théorie statistique des champs proprement dit : elle réutilise *constamment* les parties A et B (la gaussienne du chapitre 5 devient l'intégrale gaussienne du chapitre 11, le noyau de la chaleur du chapitre 8 devient le propagateur euclidien du chapitre 13, la fonction de Green du chapitre 7 devient le propagateur libre des diagrammes de Feynman du chapitre 12). La partie D (chapitres 17–18) ouvre sur les symétries en physique (groupes, Noether, jauge, brisure spontanée — d'après le cours de J.-B. Zuber [19]) et sur la relativité restreinte avec l'électromagnétisme covariant (d'après le cours d'A. Comtet [20]) : elle réinvestit tous les outils des parties A–C. Chaque chapitre contient en outre une section « *Exemples physiques approfondis* » alimentée par ces deux cours et par *QED, QCD en pratique* [21] : c'est là que les notions abstraites deviennent des calculs de physique complets.

Table des matières

Comment travailler avec ce cours	i
I Prérequis et analyse des distributions	1
1 Calcul différentiel et intégration : le socle	3
1.1 Multi-indices et notations de Schwartz	3
1.2 Les trois théorèmes de convergence de Lebesgue	4
1.3 Coordonnées polaires et l'intégrale gaussienne	5
1.4 Intégration par parties et formule de Green	6
1.5 Espaces L^p et inégalités de Hölder–Minkowski	6
1.6 Exemples physiques approfondis	7
1.7 Exercices corrigés	7
2 Fonctions test et régularisation	9
2.1 La fonction plateau fondamentale	9
2.2 Convolution des fonctions	10
2.3 Régularisation : le théorème d'approximation	11
2.4 Partitions de l'unité	11
2.5 Exemples physiques approfondis	12
2.6 Exercices corrigés	13
3 Les distributions : définitions, exemples, calcul	15
3.1 Définition et critère de continuité	15
3.2 Le bestiaire fondamental	15
3.3 Convergence des suites de distributions	16
3.4 Dérivation des distributions	17
3.5 Support, localisation, recollement	18
3.6 Exemples physiques approfondis	19
3.7 Exercices corrigés	20
4 Convolution des distributions et solutions élémentaires	23
4.1 Distributions à support compact	23
4.2 Produit tensoriel de distributions	23
4.3 Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$	24
4.4 Solutions élémentaires : le principe général	24
4.5 Exemples physiques approfondis	26
4.6 Exercices corrigés	26

5	Transformation de Fourier et distributions tempérées	29
5.1	La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	29
5.2	Distributions tempérées	30
5.3	Formule sommatoire de Poisson et échantillonnage	31
5.4	Espaces de Sobolev par Fourier	32
5.5	Exemples physiques approfondis	32
5.6	Exercices corrigés	33
II	Équations aux dérivées partielles fondamentales	35
6	L'équation de transport et la méthode des caractéristiques	37
6.1	Transport à coefficients constants	37
6.2	Coefficients variables et formule intégrée	38
6.3	EDP non linéaires d'ordre 1 : Burgers et les chocs	39
6.4	Exemples physiques approfondis	40
6.5	Exercices corrigés	40
7	Laplacien, fonctions de Green et potentiel newtonien	43
7.1	La solution élémentaire du laplacien	43
7.2	Propriété de la moyenne et principe du maximum	44
7.3	Fonction de Green du domaine et noyau de Poisson	45
7.4	Exemples physiques approfondis	46
7.5	Exercices corrigés	47
8	L'équation de la chaleur et le mouvement brownien	49
8.1	Le noyau de la chaleur	49
8.2	Du marcheur aléatoire à la diffusion	50
8.3	Fokker–Planck : diffusion avec dérive	51
8.4	Exemples physiques approfondis	52
8.5	Exercices corrigés	53
9	Ondes et Schrödinger : propagation et dispersion	55
9.1	Corde vibrante : d'Alembert	55
9.2	Dimension 3 : moyennes sphériques et Huygens	56
9.3	Schrödinger libre : dispersion	57
9.4	Exemples physiques approfondis	57
9.5	Exercices corrigés	58
III	Théorie statistique des champs	61
10	Physique statistique d'équilibre : fonctions de corrélation et réponse	63
10.1	Mesure de Gibbs et fonction de partition	63
10.2	Fonctions de corrélation	64
10.3	Champ extérieur et réponse linéaire statique	64
10.4	Du réseau au continuum : le champ $\phi(x)$	65
10.5	Exemples physiques approfondis	66
10.6	Exercices corrigés	66

11 L'intégrale fonctionnelle gaussienne et les systèmes élastiques	69
11.1 Intégrale gaussienne en dimension n , proprement	69
11.2 La corde élastique thermique : calcul exact	70
11.3 Fonctionnelle génératrice et propagateur	70
11.4 Exemples physiques approfondis	71
11.5 Exercices corrigés	72
12 Point col, méthode variationnelle et diagrammes de Feynman	75
12.1 La méthode du point col (Laplace / phase stationnaire)	75
12.2 Méthode variationnelle : l'inégalité de Gibbs–Bogoliubov	76
12.3 Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman	76
12.4 Exemples physiques approfondis	78
12.5 Exercices corrigés	78
13 L'intégrale de chemin : quantique, temps imaginaire, instantons	81
13.1 Construction de l'intégrale de chemin	81
13.2 Fonction de partition quantique et conditions périodiques	82
13.3 Fonctions de corrélation et fréquences de Matsubara	83
13.4 Double puits et instantons : l'effet tunnel par le col	83
13.5 Exemples physiques approfondis	84
13.6 Exercices corrigés	85
14 États cohérents, bosons, fermions et variables de Grassmann	87
14.1 États cohérents bosoniques	87
14.2 Variables de Grassmann : mode d'emploi complet	88
14.3 Exemples physiques approfondis	89
14.4 Exercices corrigés	90
15 Réponse linéaire, fluctuation–dissipation et formule de Kubo	93
15.1 La formule de Kubo	93
15.2 Continuation analytique depuis Matsubara	94
15.3 Le théorème fluctuation–dissipation	94
15.4 Conductivité et formule de Kubo électrique	95
15.5 Exemples physiques approfondis	95
15.6 Exercices corrigés	96
16 Le groupe de renormalisation : une introduction opératoire	99
16.1 L'idée de Kadanoff : les blocs de spins	99
16.2 RG exact : la chaîne d'Ising décimée	100
16.3 Comptage de puissances et dimension critique	100
16.4 Exemples physiques approfondis	102
16.5 Exercices corrigés	103
IV Symétries, relativité et électromagnétisme	105
17 Symétries en physique : groupes, lois de conservation, brisure	107
17.1 Transformations, groupes, premiers exemples	107
17.2 Scalaires, vecteurs, tenseurs, pseudo-objets	108
17.3 Le principe de Curie	109
17.4 Groupes continus, générateurs, théorème de Noether	109
17.5 L'invariance de jauge : de $U(1)$ global à l'électrodynamique	110
17.6 Représentations : pourquoi les niveaux se dégènèrent	111

17.7	Brisure spontanée de symétrie et théorème de Goldstone	111
17.8	Exercices corrigés	112
18	Relativité restreinte et électromagnétisme covariant	115
18.1	L'intervalle, structure causale, temps propre	115
18.2	Transformations de Lorentz et diagrammes de Minkowski	116
18.3	Quadrivecteurs, dynamique, collisions	116
18.4	Le tenseur électromagnétique et les équations de Maxwell	117
18.5	Transformation des champs : le faisceau qui devient aimant	118
18.6	Potentiels retardés, Liénard–Wiechert, rayonnement	118
18.7	Exercices corrigés	119
A	Le notebook compagnon : mode d'emploi	121

Première partie

Prérequis et analyse des distributions

Chapitre 1

Calcul différentiel et intégration : le socle

Ce chapitre rassemble *tout* ce que les deux polys supposent connu sans le redire : multi-indices, formule de Leibniz, théorèmes de convergence de Lebesgue, intégrales à paramètre, coordonnées polaires et gaussiennes. Rien n'y est difficile, mais tout y est utilisé des dizaines de fois dans la suite. Un lecteur pressé peut le parcourir et y revenir à la demande.

Prérequis / rappel

On suppose connus : la topologie élémentaire de $\mathbb{R}^N$ (ouverts, fermés, compacts ; un compact de $\mathbb{R}^N$ est un fermé borné), la continuité et la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables, et l'intégrale de Lebesgue (au niveau « admis » : on rappellera précisément les trois théorèmes de convergence dont on se sert).

1.1 Multi-indices et notations de Schwartz

L'analyse à plusieurs variables devient illisible sans une notation compacte pour les dérivées partielles itérées. Laurent Schwartz a popularisé celle-ci :

Définition 1.1 (Multi-index). Un *multi-index* est un N -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$. On pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N \quad (\text{longueur}), \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N},$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}.$$

On écrit $\beta \leq \alpha$ lorsque $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout i , et alors $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Exemple 1.2 (Trois lectures d'un même symbole). En dimension $N = 3$ avec $\alpha = (2, 0, 1)$:

$$|\alpha| = 3, \quad x^\alpha = x_1^2 x_3, \quad \partial^\alpha f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3}.$$

Le laplacien s'écrit $\Delta = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 = \sum_{|\alpha|=2, \alpha=2e_i} \partial^\alpha$; le développement de Taylor à l'ordre m prend la forme compacte

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^m).$$

Proposition 1.3 (Formule de Leibniz multidimensionnelle). *Si $f, g \in C^{|\alpha|}$ au voisinage de x , alors*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g. \quad (1.1)$$

Démonstration. **(1)** Pour $N = 1$ c'est la récurrence classique sur $\alpha \in \mathbb{N}$: vraie pour $\alpha = 1$ (règle du produit), et si elle vaut pour α , on dérive une fois de plus et on regroupe avec la relation de Pascal $\binom{\alpha}{\beta-1} + \binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha+1}{\beta}$. **(2)** Pour N quelconque, on applique le cas unidimensionnel successivement dans chaque variable : les dérivées partielles par rapport à des variables distinctes commutent (théorème de Schwarz, licite car $f, g \in C^{|\alpha|}$), et les coefficients binomiaux se multiplient variable par variable, ce qui donne exactement $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i}$. $\square$

Attention — piège classique

La formule (1.1) exige que *les deux* facteurs soient dérivables. Au chapitre 3, on définira $\partial^\alpha(fT)$ pour $f \in C^\infty$ et T distribution : la *même* formule restera vraie, mais il faudra la *redémontrer* par dualité — on ne peut pas « dériver » une distribution point par point.

1.2 Les trois théorèmes de convergence de Lebesgue

Toute la théorie des distributions repose sur des passages à la limite sous l'intégrale. Les trois énoncés suivants sont utilisés sans arrêt.

Théorème 1.4 (Convergence monotone, Beppo Levi). *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^N$, $f_n \uparrow f$ presque partout. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx \quad (\text{valeurs dans } [0, +\infty]).$$

Théorème 1.5 (Convergence dominée, Lebesgue). *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers f , et supposons qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. pour tout n . Alors $f \in L^1$ et*

$$\int f_n dx \longrightarrow \int f dx, \quad \text{et même} \quad \int |f_n - f| dx \rightarrow 0.$$

Théorème 1.6 (Fubini–Tonelli). *Si f est mesurable sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et si l'une des intégrales itérées de $|f|$ est finie, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx \right) dy.$$

Exemple 1.7 (Un usage typique — dérivation sous l'intégrale). Soit $F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2} dx$ pour $t > 0$. Fixons $t_0 > 0$ et h petit ; le taux d'accroissement $\frac{e^{-(t_0+h)x^2} - e^{-t_0x^2}}{h}$ est dominé (théorème des accroissements finis) par $x^2 e^{-\frac{t_0}{2}x^2} \in L^1$, indépendamment de h . La convergence dominée donne alors

$$F'(t) = - \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-tx^2} dx.$$

C'est le mécanisme « dérivation sous le signe somme » que l'on réutilisera pour dériver sous le crochet de dualité au chapitre 3.

Attention — piège classique

Sans domination, tout peut arriver. La suite $f_n(x) = n \mathbf{1}_{[0,1/n]}(x)$ tend vers 0 p.p., mais $\int f_n = 1$ pour tout n : la masse « s'échappe » en se concentrant. Cette suite est précisément une *approximation de la masse de Dirac* : le chapitre 3 donnera un sens rigoureux à $f_n \rightarrow \delta_0$. Le « défaut de convergence dominée » est donc la naissance des distributions.

1.3 Coordonnées polaires et l'intégrale gaussienne

Proposition 1.8 (Coordonnées polaires en dimension N). *Pour f mesurable positive ou intégrable,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{N-1}} f(r\omega) r^{N-1} d\sigma(\omega) dr,$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface sur la sphère unité S^{N-1} , d'aire totale $|S^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$.

Exemple 1.9 (Intégrabilité des puissances — à connaître par cœur). $\int_{|x| \leq 1} \frac{dx}{|x|^a} < \infty \iff a < N$,
 $\int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^a} < \infty \iff a > N$.

En effet, en polaires les deux intégrales valent $|S^{N-1}| \int r^{N-1-a} dr$ sur $(0, 1)$ resp. $(1, \infty)$. Ce critère décidera de l'intégrabilité locale de la solution élémentaire du laplacien ($|x|^{2-N}$, localement intégrable car $2 - N > -N$) au chapitre 7.

Théorème 1.10 (Intégrale de Gauss).

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \text{et pour } a > 0, b \in \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}. \quad (1.2)$$

Démonstration. (1) Posons $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$. Par Fubini–Tonelli (intégrande positive), $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. (2) En polaires, $I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$, d'où $I = \sqrt{\pi}$ ($I > 0$). (3) Pour la forme générale, on complète le carré : $-ax^2 + bx = -a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2}{4a}$; le changement de variable $u = \sqrt{a}(x - \frac{b}{2a})$ (pour b réel; pour b complexe on décale le contour, licite car e^{-au^2} décroît uniformément dans une bande horizontale — c'est un argument d'holomorphicité que l'on détaillera au chapitre 5) donne le résultat. $\square$

Idée-clé

La formule (1.2) est *l'atome* de toute la partie C. L'intégrale fonctionnelle gaussienne du chapitre 11 n'est rien d'autre que (1.2) répétée dans chaque direction propre d'un opérateur : pour une matrice symétrique définie positive A ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}x^\top Ax + j^\top x} d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}j^\top A^{-1}j}.$$

Le passage $n \rightarrow \infty$ (déterminants fonctionnels, propagateurs) est le cœur de la théorie des champs. Retenez le triptyque : *compléter le carré — diagonaliser — compter les modes*.

Application finance / signal

En finance quantitative, la même intégrale gaussienne donne le prix Black–Scholes [18] : l'espérance $\mathbb{E}[e^{\sigma W_T} f(S_T)]$ sous mesure risque-neutre est une intégrale gaussienne en $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$, que l'on évalue en complétant le carré — exactement l'étape (3) de la preuve ci-dessus. Le TD 1 du notebook vérifie numériquement (1.2) et son extension matricielle

par échantillonnage Monte-Carlo (`optimizr.mcmc_sample`).

1.4 Intégration par parties et formule de Green

Théorème 1.11 (Intégration par parties dans $\mathbb{R}^N$). Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ dont l'une est à support compact. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_{x_i} f g \, dx = - \int_{\mathbb{R}^N} f \partial_{x_i} g \, dx. \quad (1.3)$$

Plus généralement, sur un ouvert borné Ω à bord C^1 de normale extérieure n ,

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} f g \, dx = \int_{\partial\Omega} f g n_i \, d\sigma - \int_{\Omega} f \partial_{x_i} g \, dx. \quad (1.4)$$

Démonstration. (1) (1.3) : par Fubini, on intègre d'abord en x_i ; sur chaque droite, $\int_{\mathbb{R}} (fg)' \, dx_i = 0$ car fg est à support compact, d'où $\int (f'g + fg') \, dx_i = 0$. (2) (1.4) découle du théorème de la divergence $\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma$ appliqué au champ $F = (0, \dots, fg, \dots, 0)$ (i -ième composante). Le théorème de la divergence est admis ici ; il est démontré par partition de l'unité et redressement local du bord (Golse, appendice du ch. 3), technique que l'on présentera au chapitre 2. $\square$

Corollaire 1.12 (Formule de Green). Pour $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Intuition

L'intégration par parties est la *machine à transférer les dérivées*. Toute la théorie des distributions est fondée sur ce transfert : quand T n'est pas dérivable, on définit $\langle \partial T, \varphi \rangle := -\langle T, \partial \varphi \rangle$ en s'appuyant sur (1.3) — la dérivée est envoyée sur la fonction test, qui est infiniment lisse et encaisse tout. La formule de Green, elle, engendrera la *formule des sauts* et les fonctions de Green du chapitre 7.

1.5 Espaces L^p et inégalités de Hölder–Minkowski

Définition 1.13. Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables telles que $\|f\|_{L^p} = (\int_{\Omega} |f|^p)^{1/p} < \infty$; L^∞ est l'espace des fonctions essentiellement bornées. On note p' l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.14 (Hölder puis Minkowski). (i) Si $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ alors $fg \in L^1$ et $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$. (ii) $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$: $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme.

Démonstration. (1) Concavité du logarithme (inégalité de Young) : pour $a, b \geq 0$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$. En effet, si $ab > 0$, $\log(ab) = \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{p'} \log b^{p'} \leq \log(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'})$. (2) On normalise $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{p'}} = 1$ et on intègre l'inégalité de Young point par point : $|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'} = 1$. Le cas général suit par homogénéité. (3) Minkowski : $|f + g|^p \leq |f + g|^{p-1}(|f| + |g|)$; on applique Hölder à chacun des deux termes avec les exposants (p, p') , en notant que $(p-1)p' = p$; on divise par $\|f + g\|_{L^{p'}}^{p-1} = \|f + g\|_{L^p}^{p-1}$ (si non nul, sinon rien à démontrer). $\square$

Exemple 1.15 (Emboîtement sur un domaine borné). Si $|\Omega| < \infty$ et $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec $\|f\|_{L^q} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}$: appliquer Hölder à $|f|^q \cdot 1$ avec l'exposant p/q . Sur $\mathbb{R}^N$ tout entier, aucune inclusion n'a lieu : $|x|^{-N/p} \mathbf{1}_{|x| \leq 1}$ est dans L^q pour $q < p$ mais pas dans L^p ; l'inverse à l'infini.

Au notebook compagnon

TD 1 du notebook — vérification numérique de l'intégrale de Gauss par MCMC (`optimizr.mcmc_sample`), convergence $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ de Monte-Carlo, et visualisation *animée* de la concentration $n\mathbf{1}_{[0,1/n]} \rightarrow \delta_0$ — première rencontre avec la masse de Dirac, avant sa définition rigoureuse au chapitre 3.

1.6 Exemples physiques approfondis

Exemple 1.16 (La loi de Gauss de l'électrostatique, ou le théorème de la divergence au travail). Le champ d'une charge ponctuelle q à l'origine est $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$. **(1)** Flux à travers une sphère de rayon R : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$, *indépendant de R* — la décroissance en $1/r^2$ compense exactement la croissance de l'aire en r^2 : c'est la signature géométrique de la conservation du flux en dimension 3. **(2)** Pour une surface S quelconque ne contenant pas la charge, le théorème de la divergence donne $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x = 0$ car $\nabla \cdot (\hat{r}/r^2) = 0$ hors de l'origine (calcul direct en coordonnées sphériques : $\frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \cdot r^{-2}) = 0$). **(3)** Toute l'information est donc *concentrée à l'origine* : le champ de vecteurs $\hat{r}/r^2$ a une divergence nulle partout où elle est définie, mais un flux non nul à travers toute surface englobante. Aucune fonction ne peut faire cela — il faudra une *distribution* : on montrera au chapitre 7 que $\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} = \delta_0$, c'est-à-dire $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ avec $\rho = q\delta_0$: la première équation de Maxwell (écrite en covariant au chapitre 18, thm. 18.10). Ce chapitre-ci fournit l'outil (divergence, flux) ; le chapitre 3 fournira l'objet (δ).

Exemple 1.17 (L'intégrale gaussienne au travail : la distribution de Maxwell–Boltzmann). Dans un gaz à température T , les vitesses suivent la densité $f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-m|\mathbf{v}|^2/2k_B T}$ — une gaussienne à trois dimensions, dont toute la phénoménologie sort de l'intégrale de Gauss (1.2) et de ses dérivées par rapport au paramètre. **(1)** Normalisation : produit de trois gaussiennes 1D, chacune donnant $\sqrt{2\pi k_B T/m}$. **(2)** Vitesse quadratique moyenne : $\langle v_x^2 \rangle = -2 \frac{\partial}{\partial(m/k_B T)} \log \int e^{-mv_x^2/2k_B T} dv_x = \frac{k_B T}{m}$, d'où $\langle |\mathbf{v}|^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}$ et l'équipartition $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$: pour N_2 à 300 K, $v_{\text{rms}} = \sqrt{3k_B T/m} \approx 517$ m/s. **(3)** Distribution du *module* : passage en sphériques (jacobien $4\pi v^2$) : $F(v) = 4\pi v^2 f(v)$, maximum en $v_p = \sqrt{2k_B T/m}$; le facteur v^2 — pur effet de volume des coquilles sphériques — déplace le maximum loin de $v = 0$ bien que chaque composante soit centrée. **(4)** Application : le flux d'effusion par un petit trou, $\Phi = \frac{1}{4}n\langle v \rangle$ avec $\langle v \rangle = \sqrt{8k_B T/\pi m}$ (intégrale gaussienne avec poids v^3) : c'est la formule qui calibre les jets moléculaires et les pompes à vide. Le même calcul gaussien, transposé aux *champs* (chap. 11), donnera le théorème de Wick.

1.7 Exercices corrigés

Exercice 1.1 (★) — Leibniz en pratique

Calculer $\partial^\alpha(x^\beta)$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, puis $\partial^{(2,1)}(x_1^2 x_2 e^{x_1})$ en dimension 2.

Solution détaillée

(1) Variable par variable, $\partial_{x_i}^{\alpha_i} x_i^{\beta_i} = \frac{\beta_i!}{(\beta_i - \alpha_i)!} x_i^{\beta_i - \alpha_i}$ si $\alpha_i \leq \beta_i$, 0 sinon. Donc $\partial^\alpha x^\beta = \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha}$ si $\alpha \leq \beta$, 0 sinon ; en particulier $\partial^\alpha x^\alpha = \alpha!$ — la normalisation qui rend la formule de Taylor si propre. **(2)** Leibniz en x_1 (avec $f = x_1^2$, $g = e^{x_1}$, la variable x_2 ne portant qu'une dérivée sur x_2) : $\partial_{x_2}(x_1^2 x_2 e^{x_1}) = x_1^2 e^{x_1}$, puis $\partial_{x_1}^2(x_1^2 e^{x_1}) = (x_1^2 + 4x_1 + 2)e^{x_1}$. Résultat : $(x_1^2 + 4x_1 + 2)e^{x_1}$.

Exercice 1.2 (★★) — Les moments gaussiens

Montrer que pour $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2k-1)!!}{(2a)^k}, \quad (2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1).$$

En déduire le *théorème de Wick gaussien* en dimension 1 : $\mathbb{E}[X^{2k}] = (2k-1)!! \sigma^{2k}$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Solution détaillée

(1) Dérivons k fois $\int e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$ par rapport à a (licite par convergence dominée, cf. exemple 1.7) : chaque dérivée descend un facteur $-x^2$, donc $\int x^{2k} e^{-ax^2} dx = (-1)^k \frac{d^k}{da^k} \sqrt{\pi/a}$.

(2) Or $\frac{d^k}{da^k} a^{-1/2} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} a^{-1/2-k}$, d'où la formule. (3) Avec $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ et la normalisation $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$, on trouve $\mathbb{E}[X^{2k}] = (2k-1)!! \sigma^{2k}$. Le facteur $(2k-1)!!$ compte exactement les *appariements* de $2k$ objets : c'est le germe du théorème de Wick et des diagrammes de Feynman (chapitre 12). ✓

Exercice 1.3 (★★) — Convergence dominée en action

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 + \frac{x}{n})^{-n} \sin(x/n) dx$.

Solution détaillée

(1) Convergence ponctuelle : $(1 + x/n)^{-n} \rightarrow e^{-x}$ et $\sin(x/n) \rightarrow 0$, donc l'intégrande tend vers 0 p.p. (2) Domination : pour $n \geq 2$, $(1 + x/n)^{-n} \leq (1 + x/2)^{-2}$ (la suite $n \mapsto (1 + x/n)^n$ croît), et $|\sin(x/n)| \leq 1$; or $(1 + x/2)^{-2} \in L^1(0, \infty)$. (3) Le théorème 1.5 conclut : la limite vaut $\boxed{0}$.

Exercice 1.4 (★★★) — Aire de la sphère et fonction Γ

En calculant $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx$ de deux façons, prouver $|S^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$. En déduire le volume de la boule unité et son comportement quand $N \rightarrow \infty$.

Solution détaillée

(1) Par Fubini, $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx = (\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt)^N = \pi^{N/2}$. (2) En polaires, la même intégrale vaut $|S^{N-1}| \int_0^\infty e^{-r^2} r^{N-1} dr = |S^{N-1}| \cdot \frac{1}{2} \Gamma(N/2)$ (poser $u = r^2$). (3) Donc $|S^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$ et $|B_1| = \frac{|S^{N-1}|}{N} = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)}$. (4) Par Stirling, $|B_1| \sim \frac{1}{\sqrt{N\pi}} \left(\frac{2\pi e}{N}\right)^{N/2} \rightarrow 0$ *super-exponentiellement* : en grande dimension, tout le volume d'une boule se concentre près de sa surface. Ce phénomène de *concentration de la mesure* est la raison profonde pour laquelle la méthode du point col (chapitre 12) devient *exacte* dans la limite thermodynamique. ✓

Chapitre 2

Fonctions test et régularisation

Les distributions seront définies par dualité contre des *fonctions test* : infiniment dérivables et à support compact. Ce chapitre construit ces fonctions (leur existence n'a rien d'évident !), puis développe l'outil le plus utile de toute l'analyse : la *régularisation par convolution*, qui permet d'approcher n'importe quelle fonction raisonnable par des fonctions C^∞ .

Prérequis / rappel

Le *support* d'une fonction continue f est $\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ (un fermé). Une fonction est « à support compact » si ce fermé est borné. On rappelle qu'une fonction C^∞ non nulle dont toutes les dérivées s'annulent en un point existe : c'est tout l'objet de la section suivante. Enfin, une fonction analytique (somme de sa série de Taylor) à support compact est *identiquement nulle* — les fonctions test sont donc un phénomène purement C^∞ , non analytique.

2.1 La fonction plateau fondamentale

Lemme 2.1 (La brique de base). *La fonction*

$$\chi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

est C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $\chi^{(k)}(0) = 0$ pour tout k .

Démonstration. **(1)** Sur $t > 0$, une récurrence immédiate montre $\chi^{(k)}(t) = P_k(1/t) e^{-1/t}$ pour un polynôme P_k ($P_0 = 1$, et $P_{k+1}(u) = u^2(P_k(u) - P'_k(u))$). **(2)** Quand $t \rightarrow 0^+$, $u = 1/t \rightarrow +\infty$ et $P_k(u)e^{-u} \rightarrow 0$ (l'exponentielle bat tout polynôme). Donc chaque dérivée se prolonge continûment par 0 en 0. **(3)** On vérifie que le prolongement est bien dérivable en 0 : le taux d'accroissement $\frac{\chi^{(k)}(t)-0}{t} = \frac{1}{t} P_k(1/t) e^{-1/t} \rightarrow 0$, donc $\chi^{(k+1)}(0) = 0$ existe. Récurrence. $\square$

Définition 2.2 (Fonction test ; l'espace C_c^∞). On note $C_c^\infty(\Omega)$ (ou $\mathcal{D}(\Omega)$) l'espace des fonctions C^∞ sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à support compact inclus dans Ω .

Exemple 2.3 (La « bosse » standard).

$$\rho(x) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad C \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1.$$

C'est $\chi(1 - |x|^2)$ à normalisation près, donc C^∞ par composition (lemme 2.1) ; son support est exactement la boule unité fermée. C'est la fonction test canonique — toutes les autres s'en déduisent par translation, dilatation, produit et somme.

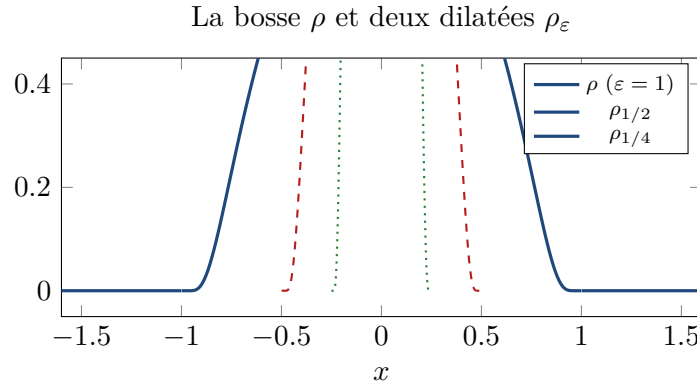


FIGURE 2.1 – Approximation de l’unité : $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \rho(x/\varepsilon)$ concentre la même masse totale 1 dans une boule de rayon ε . À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la suite « tend vers » la masse de Dirac — au sens des distributions du chapitre 3.

2.2 Convolution des fonctions

Définition 2.4 (Produit de convolution). Pour f, g mesurables telles que l’intégrale converge,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x - y) dy.$$

Intuition

$f * g$ est une *moyenne glissante* : la valeur en x est la moyenne des valeurs de f autour de x , pondérée par g retournée et centrée en x . Si $g = \rho_\varepsilon$ (bosse étroite d’intégrale 1), $f * \rho_\varepsilon$ est un « flou gaussien » de rayon ε : on lisse f à l’échelle ε sans déplacer sa masse. En traitement d’image, c’est exactement le *blur* ; en probabilités, la densité d’une somme de variables indépendantes est la convolution des densités ; en physique, la réponse d’un système linéaire invariant par translation est la convolution du signal d’entrée par la *réponse impulsionnelle* — thème central du chapitre 7.

Proposition 2.5 (Propriétés élémentaires). (i) $f * g = g * f$ et $(f * g) * h = f * (g * h)$ quand tout converge. (ii) (Young) Si $f \in L^1$, $g \in L^p$ alors $f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$. (iii) $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$. (iv) Si $f \in C_c^k$ et $g \in L_{\text{loc}}^1$, alors $f * g \in C^k$ et $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$ pour $|\alpha| \leq k$.

Démonstration. **(1)** (i) : changement de variable $y \mapsto x - y$ puis Fubini. **(2)** (ii) : pour $p = 1$, Fubini–Tonelli directement. Pour p général, on écrit $|f(x - y)g(y)| = |f(x - y)|^{1/p'} \cdot |f(x - y)|^{1/p} |g(y)|$ et on applique Hölder ; en élevant à la puissance p et en intégrant en x (Fubini), on obtient la borne. **(3)** (iii) : si $x \notin \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$, alors pour tout y , $f(x - y)g(y) = 0$ (sinon $x - y \in \text{supp } f$ et $y \in \text{supp } g$ donneraient $x \in \text{somme}$). **(4)** (iv) : le taux d’accroissement de $x \mapsto f(x - y)$ est dominé par $\sup |\partial f| \cdot \mathbf{1}_K(y)$ localement (K compact fixe car $\text{supp } f$ compact et x dans un borné) ; convergence dominée. On itère pour $|\alpha| \leq k$. $\square$

Attention — piège classique

Dans (iv), c’est le facteur lisse qui donne sa régularité au produit : $f * g$ est aussi lisse que le meilleur des deux facteurs. C’est un phénomène remarquable — la convolution ne peut que régulariser, jamais dégrader. La contrepartie : elle étale les supports (iii), donc détruit la localisation fine.

2.3 Régularisation : le théorème d'approximation

Théorème 2.6 (Régularisation par convolution). *Soit $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \rho(x/\varepsilon)$ avec ρ la bosse de l'exemple 2.3. Alors :*

1. *si f est continue, $f * \rho_\varepsilon \rightarrow f$ uniformément sur tout compact ;*
2. *si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, alors $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p} \rightarrow 0$;*
3. *$f * \rho_\varepsilon \in C^\infty$ dans tous les cas ($f \in L^1_{\text{loc}}$ suffit).*

Démonstration. (1) Comme $\int \rho_\varepsilon = 1$,

$$(f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x) = \int [f(x-y) - f(x)] \rho_\varepsilon(y) dy = \int_{|y| \leq \varepsilon} [f(x-y) - f(x)] \rho_\varepsilon(y) dy.$$

Sur un compact K , f est uniformément continue sur le 1-voisinage de K : $\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0, |y| \leq \varepsilon_0 \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| \leq \eta$ pour tout $x \in K$. D'où $\sup_K |f * \rho_\varepsilon - f| \leq \eta$ dès que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. (2) Même calcul avec l'inégalité intégrale de Minkowski : $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \sup_{|y| \leq \varepsilon} \|\tau_y f - f\|_{L^p}$, où $\tau_y f = f(\cdot - y)$. La continuité des translations dans L^p ($\|\tau_y f - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow 0$; on l'établit en approchant f par une fonction continue à support compact, dense dans L^p) conclut. (3) C'est la proposition 2.5(iv) appliquée avec le facteur lisse $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty$, itérée à tout ordre. $\square$

Corollaire 2.7 (Densité). *$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \leq p < \infty$, et dans C_c^0 pour la norme uniforme.*

Démonstration. Tronquer ($f \mathbf{1}_{|x| \leq R}$, convergence dominée) puis régulariser : $(f \mathbf{1}_{|x| \leq R}) * \rho_\varepsilon$ est C^∞ à support compact (prop. 2.5(iii)) et approche f en norme L^p . $\square$

Exemple 2.8 (Régulariser une marche d'escalier). Soit $H = \mathbf{1}_{[0, \infty)}$ la fonction de Heaviside. Alors

$$(H * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{-\infty}^x \rho_\varepsilon(u) du$$

est une « marche lissée » : elle vaut 0 pour $x \leq -\varepsilon$, 1 pour $x \geq \varepsilon$, et monte de façon C^∞ entre les deux. Sa dérivée est exactement ρ_ε — une bosse concentrée. À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$: la dérivée de la marche est « la bosse infiniment concentrée », c'est-à-dire la masse de Dirac. Le chapitre suivant transformera cette phrase en théorème ($H' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'$).

Application physique

En physique du solide, remplacer un potentiel en créneau par sa version régularisée $V * \rho_\varepsilon$ est le geste standard pour donner un sens aux équations du mouvement ; en théorie des champs, la régularisation ρ_ε est un *cut-off ultraviolet* : elle supprime les fluctuations d'échelle inférieure à ε . Le flot des constantes de couplage quand ε varie est le *groupe de renormalisation* (aperçu au chapitre 12).

2.4 Partitions de l'unité

Théorème 2.9 (Partition de l'unité). *Soit K compact recouvert par des ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Alors il existe $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, telles que*

$$\sum_{j=1}^m \psi_j = 1 \text{ sur un voisinage de } K, \quad 0 \leq \sum_j \psi_j \leq 1 \text{ partout.}$$

Démonstration. (1) Pour chaque $x \in K$, choisissons une boule fermée $\overline{B}(x, r_x) \subset \Omega_{j(x)}$. Par compacité, un nombre fini de boules ouvertes $B_i = B(x_i, r_i)$ recouvre K . (2) Pour chaque i , l'exemple 2.3 translaté-dilaté fournit $\theta_i \in C_c^\infty(B(x_i, 2r_i))$ avec $0 \leq \theta_i \leq 1$ et $\theta_i = 1$ sur $\overline{B}_i$ (prendre la bosse composée avec une rampe : $\theta_i = \chi_{\text{rampe}}(|x - x_i|)$, construite en convolant l'indicatrice de $B(x_i, \frac{3}{2}r_i)$ par $\rho_{r_i/4}$). Quitte à réduire r_i , $\text{supp } \theta_i \subset \Omega_{j(x_i)}$. (3) Posons $\psi'_1 = \theta_1$, $\psi'_i = \theta_i \prod_{k < i} (1 - \theta_k)$. Par récurrence, $\sum_{i \leq m} \psi'_i = 1 - \prod_{i \leq m} (1 - \theta_i)$; sur K , chaque point est dans un B_i où $\theta_i = 1$, donc la somme vaut 1 sur $\bigcup B_i \supset K$, qui est un voisinage ouvert. (4) On regroupe enfin les ψ'_i par indice $j(x_i)$ commun : $\psi_j = \sum_{i: j(x_i)=j} \psi'_i$. $\square$

Idée-clé

La partition de l'unité est le *scotch* de l'analyse : elle découpe tout problème global en morceaux locaux (chacun dans une carte, un ouvert simple) puis recolle les solutions. On l'utilisera pour recoller des distributions (chapitre 3), pour localiser les singularités, et pour définir l'intégrale de surface sur $\partial\Omega$.

Au notebook compagnon

TD 2 du notebook — régularisation *animée* : convolution de la marche de Heaviside et d'un signal bruité par ρ_ε avec ε décroissant (animation GIF), illustration du théorème 2.6 et du compromis lissage/localisation. Le débruitage par convolution est comparé au filtre de Kalman (`optimizr.LinearKalmanFilter`) sur le même signal — moyenne glissante *aveugle* contre estimation *modèle-dépendante*.

2.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 2.10 (Toute mesure est un appariement avec une fonction test : le rayon du proton). Aucun détecteur ne mesure un champ *en un point* : une sonde de taille a mesure la moyenne $\int \rho(x) \varphi_a(x) dx$, où φ_a est le profil de l'appareil — exactement l'appariement $\langle \rho, \varphi \rangle$ qui définira les distributions au chapitre 3. La physique subatomique pousse cette logique à son terme : en diffusion élastique e^-p , l'électron « teste » la densité de charge $\rho(r)$ du proton avec la fonction $e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$ (échange d'un photon d'impulsion $\mathbf{q}$) : la section efficace mesure le *facteur de forme*

$$G_E(q^2) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} d^3x = 1 - \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle + \mathcal{O}(q^4),$$

développement obtenu en développant l'exponentielle sous l'intégrale (moyenne angulaire de $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})^2 = q^2 r^2 / 3$). La pente à l'origine *définit* le rayon de charge : $\langle r^2 \rangle = -6 dG_E/dq^2|_0$. Expérimentalement $G_E(q^2) \approx (1 + q^2/0,71 \text{ GeV}^2)^{-2}$ (forme dipolaire), d'où $r_p \approx 0,84 \text{ fm}$. Moralité : « la densité de charge du proton » n'est *jamais* observée ponctuellement — seule la collection des appariements $\langle \rho, e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \rangle$ l'est, et elle suffit à tout reconstruire : c'est le programme des distributions tempérées du chapitre 5.

Exemple 2.11 (Des champs microscopiques aux champs macroscopiques de Maxwell). Dans la matière, le champ électrique microscopique $\mathbf{e}(x)$ varie de $\sim 10^{11} \text{ V/m}$ sur des ångströms (près des noyaux) à zéro entre les atomes : inutilisable tel quel. Le champ *macroscopique* des équations de Maxwell dans les milieux est le lissé

$$\mathbf{E}(x) = (\mathbf{e} * \varphi_a)(x) = \int \mathbf{e}(y) \varphi_a(x - y) d^3y,$$

où φ_a est une fonction test positive de largeur $a \sim 10 \text{ nm}$: grande devant la maille ($\sim 0,3 \text{ nm}$), petite devant la longueur d'onde ($\sim 500 \text{ nm}$). (1) La linéarité de la convolution transporte les équations de Maxwell microscopiques sur les moyennes ; le terme de polarisation $\mathbf{P}$ naît du

développement multipolaire des charges liées à l'intérieur de φ_a (chap. 7, exemple 7.9). **(2)** Le résultat ne dépend pas du choix précis de φ_a dans la fenêtre d'échelles — exactement la robustesse des suites régularisantes (thm. 2.6) : la physique macroscopique est bien définie *parce que* la limite $\varphi_a \rightarrow \delta$ est indépendante du chemin. **(3)** Contre-exemple instructif : dans un cristal photonique, où la maille est *comparable* à la longueur d'onde, la fenêtre n'existe plus, le moyennage échoue, et il faut garder la structure complète (bandes photoniques, chap. 5, zones de Brillouin) — la frontière de validité d'une théorie effective est celle de sa fonction test.

2.6 Exercices corrigés

Exercice 2.1 (★) — Support de la bosse dilatée

Vérifier que $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-N} \rho(\cdot/\varepsilon)$ satisfait $\int \rho_\varepsilon = 1$, $\text{supp } \rho_\varepsilon = \overline{B}(0, \varepsilon)$, et $\|\partial^\alpha \rho_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon^{-N-|\alpha|} \|\partial^\alpha \rho\|_\infty$.

Solution détaillée

(1) Changement de variable $u = x/\varepsilon$, $dx = \varepsilon^N du$: $\int \rho_\varepsilon = \int \rho = 1$. **(2)** $\rho(x/\varepsilon) \neq 0 \iff |x/\varepsilon| < 1 \iff |x| < \varepsilon$. **(3)** $\partial^\alpha [\rho(x/\varepsilon)] = \varepsilon^{-|\alpha|} (\partial^\alpha \rho)(x/\varepsilon)$ par dérivation en chaîne ; multiplier par ε^{-N} . Ce $\varepsilon^{-N-|\alpha|}$ qui explose est le prix de la concentration : on ne peut pas concentrer *et* garder les dérivées bornées — préfiguration du fait que δ_0 n'est pas une fonction. ✓

Exercice 2.2 (★★) — Convolution explicite

Calculer $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$ puis $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$. Que devient la régularité à chaque convolution ? Reconnaître la limite après n convolutions (recentrée-renormalisée).

Solution détaillée

(1) $(\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]})(x) = |[0,1] \cap [x-1, x]|$ vaut x sur $[0, 1]$, $2-x$ sur $[1, 2]$, 0 ailleurs : c'est la *tente* — continue mais non C^1 . **(2)** Une convolution de plus donne une *spline quadratique* par morceaux sur $[0, 3]$, de classe C^1 : $\frac{x^2}{2}$ sur $[0, 1]$, $\frac{3}{4} - (x - \frac{3}{2})^2$ sur $[1, 2]$, $\frac{(3-x)^2}{2}$ sur $[2, 3]$. Chaque convolution gagne un cran de régularité (C^{k-1} pour k facteurs) : illustration directe de la proposition 2.5(iv). **(3)** La densité de la somme $U_1 + \dots + U_n$ de n uniformes indépendantes est la convolée n -uple (spline de B-spline d'ordre n) ; recentrée-renormalisée, elle tend vers la gaussienne — c'est le théorème central limite *vu comme lissage itéré*. ✓

Exercice 2.3 (★★) — Fonction plateau

Construire explicitement $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\theta = 1$ sur $\overline{B}(0, 1)$ et $\text{supp } \theta \subset B(0, 2)$.

Solution détaillée

(1) Posons $f = \mathbf{1}_{\overline{B}(0, 3/2)}$ et $\theta = f * \rho_{1/4}$. **(2)** $\theta \in C^\infty$ (prop. 2.5(iv)) ; $\text{supp } \theta \subset \overline{B}(0, 3/2) + \overline{B}(0, 1/4) \subset B(0, 2)$ (iii). **(3)** Pour $|x| \leq 1$: $\theta(x) = \int_{|y| \leq 1/4} \rho_{1/4}(y) \mathbf{1}_{|x-y| \leq 3/2} dy = \int \rho_{1/4} = 1$ car $|x-y| \leq 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$. ✓

Exercice 2.4 (* — Borel : toute série de Taylor est atteinte)**

Montrer (théorème de Borel) que pour toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels, il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}(0) = a_k$ pour tout k . *Indication : poser $f(x) = \sum_k \frac{a_k}{k!} x^k \theta(\lambda_k x)$ avec θ plateau valant 1 près de 0 et $\lambda_k \rightarrow \infty$ bien choisis.*

Solution détaillée

(1) Soit $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\theta = 1$ sur $[-1, 1]$, $\text{supp } \theta \subset [-2, 2]$ (exercice 2.3). Posons $u_k(x) = \frac{a_k}{k!} x^k \theta(\lambda_k x)$: chaque u_k est C^∞ , vaut $\frac{a_k}{k!} x^k$ près de 0 (à l'échelle $1/\lambda_k$), et $\text{supp } u_k \subset [-2/\lambda_k, 2/\lambda_k]$. **(2)** Pour $j < k$, la dérivée j -ième est bornée par $\|u_k^{(j)}\|_\infty \leq C_{j,k} \lambda_k^{j-k}$ (chaque facteur x restant apporte un λ_k^{-1} sur le support). En choisissant $\lambda_k \geq 2^k (1 + \max_{j < k} C_{j,k})$, on garantit $\|u_k^{(j)}\|_\infty \leq 2^{-k}$ pour tout $j < k$. **(3)** Alors $\sum_k u_k^{(j)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ pour chaque j (les $k \leq j$ en nombre fini, les $k > j$ sommables) : $f = \sum u_k \in C^\infty$ et on peut dériver terme à terme. **(4)** En 0 : $u_k^{(j)}(0) = a_k \delta_{jk}$ (le plateau vaut 1 près de 0, donc u_k y coïncide avec le monôme). D'où $f^{(j)}(0) = a_j$. Ce théorème montre que C^∞ est *immensément* plus gros que l'espace des fonctions analytiques : aucune contrainte de croissance ne pèse sur les dérivées en un point. ✓

Chapitre 3

Les distributions : définitions, exemples, calcul

Nous voici au cœur de la partie A. L'idée de Schwartz (1945) tient en une phrase : *ne plus décrire un objet par ses valeurs ponctuelles, mais par ses moyennes contre toutes les fonctions test*. Cette bascule de point de vue — l'objet devient une forme linéaire — autorise à dériver *tout*, indéfiniment, et donne un cadre commun aux fonctions, aux mesures, aux charges ponctuelles, aux dipôles et aux sauts.

Prérequis / rappel

Chapitres 1 et 2 : multi-indices, intégration par parties (1.3), fonctions test $C_c^\infty(\Omega)$, régularisation. On rappelle qu'une forme linéaire T sur un espace vectoriel muni d'une notion de convergence est *continue* si $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ dès que $\varphi_n \rightarrow \varphi$.

3.1 Définition et critère de continuité

Définition 3.1 (Convergence dans $C_c^\infty(\Omega)$). $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $C_c^\infty(\Omega)$ si : (i) il existe un compact fixe $K \subset \Omega$ contenant tous les $\text{supp } \varphi_n$; (ii) pour chaque multi-indice α , $\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformément.

Définition 3.2 (Distribution). Une *distribution* sur Ω est une forme linéaire $T : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ continue au sens précédent. On note $\langle T, \varphi \rangle$ sa valeur et $\mathcal{D}'(\Omega)$ leur espace.

De façon équivalente (critère *quantitatif*) : T est une distribution si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq p_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(K). \quad (3.1)$$

Si un même p convient pour tous les compacts, le plus petit tel p est *l'ordre* de T .

Équivalence des deux définitions. (1) (3.1) $\Rightarrow$ continuité : immédiat, car si $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $C_c^\infty(K)$, le membre de droite tend vers 0. (2) Réciproque par l'absurde : si (3.1) échoue pour un compact K , alors pour chaque n il existe $\varphi_n \in C_c^\infty(K)$ avec $|\langle T, \varphi_n \rangle| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha \varphi_n|$. Normalisons $\psi_n = \varphi_n / (n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha \varphi_n|)$: alors chaque $\sup |\partial^\alpha \psi_n| \leq 1/n \rightarrow 0$ (dès que $n \geq |\alpha|$), donc $\psi_n \rightarrow 0$ dans $C_c^\infty(K)$, mais $|\langle T, \psi_n \rangle| > 1$: contradiction. $\square$

3.2 Le bestiaire fondamental

Exemple 3.3 (Les fonctions localement intégrables). Toute $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ définit

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

C'est une distribution d'ordre 0 : $|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq (\int_K |f|) \sup_K |\varphi|$. L'application $f \mapsto T_f$ est *injective* (si $T_f = 0$ alors $f = 0$ p.p. : régulariser, $f * \rho_\varepsilon(x) = \langle T_f, \rho_\varepsilon(x - \cdot) \rangle = 0$, puis théorème 2.6). On identifie donc $f \equiv T_f$: *les fonctions sont des distributions*.

Exemple 3.4 (La masse de Dirac et ses dérivées).

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \langle \delta_a^{(\alpha)}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(a).$$

δ_a est d'ordre 0 (c'est une mesure : la charge ponctuelle unité en a) ; δ_a' est d'ordre exactement 1 (le *dipôle* ponctuel : deux charges $\pm 1/\varepsilon$ distantes de ε , à la limite). δ_a n'est *pas* une fonction : s'il existait $f \in L^1_{\text{loc}}$ avec $\int f \varphi = \varphi(a)$ pour toute φ , en prenant φ nulle près de a on aurait $f = 0$ p.p. hors de a , donc $T_f = 0$, contradiction avec $\varphi(a) \neq 0$.

Exemple 3.5 (La valeur principale de $1/x$). $1/x$ n'est pas localement intégrable en 0 (exemple 1.9). Mais la *compensation par imparité* sauve l'intégrale :

$$\left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

La limite existe : en écrivant $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) dt$ continue (Taylor avec reste intégral), le terme $\varphi(0) \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{dx}{x} = 0$ par imparité, et il reste $\int_{|x| < R} \psi$, absolument convergente. Le critère (3.1) tient avec $p = 1$: $|\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle| \leq 2R \sup |\varphi'| + \frac{2}{R} \int_{|x| > R} |\varphi|$; $\text{vp} \frac{1}{x}$ est d'ordre exactement 1. Ce prototype de *régularisation d'une divergence* est le geste inaugural de la renormalisation en théorie des champs.

Exemple 3.6 (Peigne de Dirac). $\text{III} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$: la somme est localement finie (sur tout compact, seuls un nombre fini de termes agissent), donc définit une distribution d'ordre 0. C'est l'objet central de l'échantillonnage (théorème de Shannon) et de la formule de Poisson (chapitre 5).

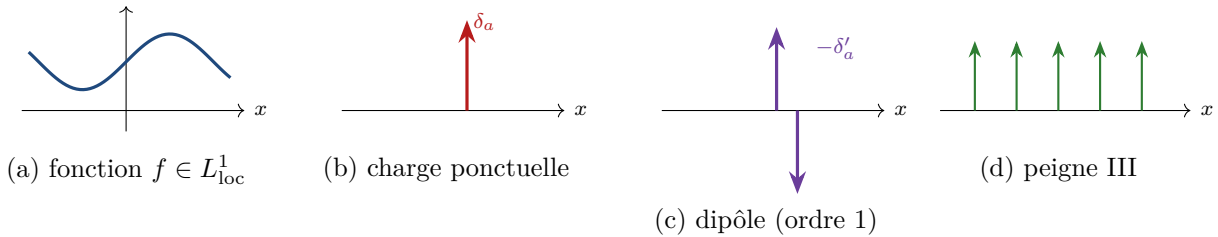


FIGURE 3.1 – Le bestiaire : quatre distributions typiques. Les flèches représentent des masses ponctuelles — objets qui n'ont *pas* de graphe fonctionnel, mais des moyennes bien définies contre toute fonction test.

3.3 Convergence des suites de distributions

Définition 3.7. $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ pour *chaque* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (convergence faible-*, testée fonction par fonction).

Proposition 3.8 (Approximations de l'unité). Si $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-N} \rho(\cdot/\varepsilon)$ avec $\int \rho = 1$, alors $\rho_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{D}'$. Plus généralement, toute suite $(f_n) \subset L^1$ avec $f_n \geq 0$, $\int f_n = 1$ et $\int_{|x| > \eta} f_n \rightarrow 0$ pour tout $\eta > 0$ converge vers δ_0 .

Démonstration. $\langle f_n, \varphi \rangle - \varphi(0) = \int f_n(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx$. On coupe en $|x| \leq \eta$ (où $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \sup_{|x| \leq \eta} |\varphi - \varphi(0)| \rightarrow 0$ par continuité) et $|x| > \eta$ (où l'intégrale de f_n tend vers 0 et φ est bornée). $\square$

Exemple 3.9 (Trois visages de δ_0 , et un piège oscillant). (i) Gaussiennes : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2} \rightarrow \delta_0$ quand $\sigma \rightarrow 0$. (ii) Lorentziennes : $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \rightarrow \delta_0$ — c'est le noyau de Poisson du demi-plan, et la clé de la formule de Sokhotski–Plemelj ci-dessous. (iii) Sinus cardinal : $\frac{\sin(nx)}{\pi x} \rightarrow \delta_0$ *bien que non positif et non intégrable* ! Ici la proposition 3.8 ne s'applique pas : la preuve passe par le lemme de Riemann–Lebesgue et l'intégrale de Dirichlet $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$. Moralité : la convergence vers δ peut être portée par des *oscillations* et non par une concentration positive. (iv) Piège : $n \sin(nx) \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'$ (Riemann–Lebesgue après IPP contre φ) alors que $\sup |n \sin(nx)| \rightarrow \infty$: la convergence distributionnelle *moyenne* les oscillations.

Théorème 3.10 (Sokhotski–Plemelj). Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \mp i\varepsilon} = \text{vp} \frac{1}{x} \pm i\pi \delta_0. \quad (3.2)$$

Démonstration. (1) Décomposons $\frac{1}{x-i\varepsilon} = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} + i\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$. (2) Partie imaginaire : c'est π fois la lorentzienne de l'exemple 3.9(ii), donc $\rightarrow i\pi\delta_0$. (3) Partie réelle : contre φ , on écrit à nouveau $\varphi = \varphi(0) + x\psi$; le terme $\varphi(0) \int \frac{x dx}{x^2+\varepsilon^2} = 0$ par imparité (au sens des intégrales symétriques), et $\int \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2} \psi \rightarrow \int \psi$ par convergence dominée ($\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2} \leq 1$, ψ intégrable à support compact modulo une troncature standard) — soit exactement $\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle$. $\square$

Application physique

(3.2) est la prescription $+i0$ des propagateurs de Feynman : le propagateur retardé $\frac{1}{\omega - \omega_0 + i0}$ se décompose en une partie principale (dispersive, réactive) et $-i\pi\delta(\omega - \omega_0)$ (absorptive, résonante). Les *relations de Kramers–Kronig* qui relient dispersion et absorption dans tout milieu causal sont une paraphrase de Sokhotski–Plemelj — on y reviendra avec la réponse linéaire au chapitre 15.

3.4 Dérivation des distributions

Définition 3.11 (Dérivée distributionnelle). Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle. \quad (3.3)$$

C'est bien une distribution (composer (3.1) avec ∂^α augmente p_K de $|\alpha|$), l'opération est *continue* : $T_n \rightarrow T$ implique $\partial^\alpha T_n \rightarrow \partial^\alpha T$ — un théorème de dérivation terme à terme *gratuit*, inimaginable pour les fonctions. Si $T = T_f$ avec $f \in C^1$, l'intégration par parties (1.3) montre que la définition redonne la dérivée usuelle : le signe $(-1)^{|\alpha|}$ est là précisément pour cette compatibilité.

Théorème 3.12 (Le calcul fondateur : $H' = \delta_0$). La fonction de Heaviside $H = \mathbf{1}_{[0,\infty)}$ vérifie, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$H' = \delta_0.$$

Démonstration. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = -[\varphi]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \quad \square$$

Théorème 3.13 (Formule des sauts, dimension 1). Soit f de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec des sauts $[f]_{a_j} = f(a_j^+) - f(a_j^-)$ aux points $a_1 < \dots < a_m$. Alors

$$f'|_{\mathcal{D}'} = \{f'\} + \sum_{j=1}^m [f]_{a_j} \delta_{a_j}, \quad (3.4)$$

où $\{f'\}$ est la dérivée classique là où elle existe.

Démonstration. On découpe l'intégrale $-\int f\varphi'$ aux points a_j et on intègre par parties sur chaque intervalle (a_j, a_{j+1}) :

$$-\int_{a_j}^{a_{j+1}} f\varphi' = -[f\varphi]_{a_j^+}^{a_{j+1}^-} + \int_{a_j}^{a_{j+1}} \{f'\}\varphi.$$

En sommant, les termes de bord se regroupent par point de découpe : $\varphi(a_j)(f(a_j^+) - f(a_j^-))$, d'où (3.4). $\square$

Exemple 3.14 (Trois dérivations expresses). (i) $\frac{d}{dx}|x| = \text{sgn}(x)$ puis $\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta_0$: la valeur absolue est « deux fois dérivable », sa dérivée seconde est une charge 2 à l'origine (courbure concentrée au pli). (ii) $\frac{d}{dx} \log|x| = \text{vp} \frac{1}{x}$: intégrer par parties $-\int \log|x| \varphi'$ en excluant $(-\varepsilon, \varepsilon)$ et vérifier que les termes de bord $\mp \log \varepsilon \varphi(\pm \varepsilon)$ se compensent à la limite (car $\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $\varepsilon \log \varepsilon \rightarrow 0$). (iii) $x\delta'_0 = -\delta_0$ (utiliser (3.5) ci-dessous) : les distributions ponctuelles ont une algèbre non triviale.

Définition 3.15 (Multiplication par une fonction lisse). Pour $a \in C^\infty(\Omega)$:

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle, \quad \text{et Leibniz survit : } \partial(aT) = a\partial T + (\partial a)T. \quad (3.5)$$

Attention — piège classique

On ne peut pas multiplier deux distributions quelconques ($\delta_0 \cdot \delta_0$ n'a pas de sens ; pire, l'exemple de Schwartz montre qu'aucun produit associatif prolongeant celui des fonctions continues n'existe : $(\text{vp} \frac{1}{x} \cdot x) \cdot \delta_0 = \delta_0$ mais $\text{vp} \frac{1}{x} \cdot (x \cdot \delta_0) = 0$). En théorie quantique des champs, les produits de propagateurs au même point sont exactement ces produits interdits : les *divergences ultraviolettes* qui imposent la renormalisation.

3.5 Support, localisation, recollement

Définition 3.16. T est nulle sur l'ouvert $\omega \subset \Omega$ si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$. Le *support* de T est le complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle.

Proposition 3.17 (Recollement). Si $\Omega = \bigcup_i \omega_i$ et si des $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ coïncident sur les intersections, il existe une unique $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qui restreint à chaque T_i .

Démonstration. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, une partition de l'unité (théorème 2.9) subordonnée à un sous-recouvrement fini de $\text{supp } \varphi$ écrit $\varphi = \sum_j \psi_j \varphi$ avec $\psi_j \varphi \in C_c^\infty(\omega_{i(j)})$; on pose $\langle T, \varphi \rangle = \sum_j \langle T_{i(j)}, \psi_j \varphi \rangle$. La cohérence sur les intersections garantit l'indépendance du choix de la partition (différence de deux choix = somme de termes testés sur des intersections, où les T_i coïncident) ; la linéarité et la continuité sont héritées. $\square$

Théorème 3.18 (Distributions à support ponctuel). Si $\text{supp } T \subset \{0\}$, alors T est une combinaison linéaire finie

$$T = \sum_{|\alpha| \leq p} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0,$$

où p est l'ordre (fini) de T .

Schéma de preuve. (1) Une distribution à support compact est d'ordre fini p (le critère (3.1) sur un voisinage compact du support vaut pour toutes les fonctions test, par troncature plateau). (2) Si φ s'annule en 0 ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leq p$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$: on tronque $\varphi_\varepsilon = \varphi \cdot \theta(x/\varepsilon)$ (θ plateau) et on contrôle $\sup |\partial^\alpha \varphi_\varepsilon| = \mathcal{O}(\varepsilon^{p+1-|\alpha|})$ grâce à Taylor — les dérivées du plateau coûtent $\varepsilon^{-|\beta|}$ mais Taylor rapporte ε^{p+1} ; la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ donne 0. (3) Donc T ne dépend que du jet d'ordre p de φ en 0 : c'est une forme linéaire sur les coefficients de Taylor $\{\partial^\alpha \varphi(0)\}_{|\alpha| \leq p}$, soit exactement une combinaison des $\partial^\alpha \delta_0$. (Détails : Golse, th. 4.1.5.) $\square$

Idée-clé

Ce théorème est un résultat de *rigidité* remarquable : à support ponctuel, il n'existe *rien d'autre* que la charge, le dipôle, le quadrupôle... C'est le fondement du *développement multipolaire* de l'électrostatique : vu de loin, toute distribution de charges compacte est asymptotiquement charge + dipôle + quadrupôle + ...

Au notebook compagnon

TD 3 du notebook — animation des approximations de l'unité (gaussienne, lorentzienne, sinus cardinal) convergeant vers δ_0 ; vérification numérique de $H' = \delta_0$ et de la formule des sauts par différences finies contre fonctions test ; illustration de Sokhotski–Plemelj (3.2) avec ε décroissant (animation du contour dans le plan complexe).

3.6 Exemples physiques approfondis

Exemple 3.19 (Densités de charge multipolaires : le dipôle comme dérivée de δ). Deux charges $\pm q$ en $\pm \frac{\mathbf{a}}{2}$, densité $\rho_a = q [\delta_{\mathbf{a}/2} - \delta_{-\mathbf{a}/2}]$. Quand $a \rightarrow 0$ à moment $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$ fixé, pour toute fonction test φ :

$$\langle \rho_a, \varphi \rangle = q \left[\varphi\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{\mathbf{a}}{2}\right) \right] \longrightarrow \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi(0) = \langle -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta_0, \varphi \rangle :$$

le dipôle ponctuel *est* la distribution $-\mathbf{p} \cdot \nabla \delta_0$ — un objet qui n'a aucun sens comme fonction, mais dont l'énergie dans un potentiel extérieur Φ tombe juste : $U = \langle \rho, \Phi \rangle = -\mathbf{p} \cdot \nabla \Phi(0) \cdot (-1) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0)$. ✓ De même le quadrupôle est $\frac{1}{2} Q_{ij} \partial_i \partial_j \delta_0$: la molécule CO_2 (linéaire, symétrique : $\mathbf{p} = 0$ par parité, chap. 17) interagit avec un gradient de champ via $Q_{zz} \approx -14 \times 10^{-40} \text{ C m}^2$ — c'est ce couplage quadrupolaire qui élargit ses raies rotationnelles et contribue à son spectre infrarouge. La hiérarchie multipolaire complète ($\delta, \nabla \delta, \nabla \nabla \delta, \dots$) est le développement de *toute* source localisée vue de loin (chap. 7, exemple 7.9) : les dérivées de δ ne sont pas une curiosité, elles sont la *base* des sources ponctuelles de la physique.

Exemple 3.20 (La prescription $i\varepsilon$ de Feynman : Sokhotski–Plemelj en théorie des champs). En théorie quantique des champs, le propagateur d'une particule de masse m s'écrit $\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$: le $i\varepsilon$ n'est pas un détail technique, c'est *toute* la structure causale. La formule de Sokhotski–Plemelj (3.2),

$$\frac{1}{x \mp i\varepsilon} = \text{vp} \frac{1}{x} \pm i\pi \delta(x),$$

appliquée à $x = p^2 - m^2$, décompose le propagateur en **(a)** une partie principale (propagation *virtuelle*, hors couche de masse) et **(b)** un terme $-i\pi \delta(p^2 - m^2)$ concentré sur la couche de masse : les particules *réelles* observables. C'est le théorème optique en germe : la partie imaginaire d'une amplitude de diffusion vers l'avant compte les états finals réels accessibles, $\text{Im} \mathcal{M}(s) \propto \sum_f \delta(s - m_f^2)$ — en pratique, la partie imaginaire du propagateur du photon virtuel dans $e^+e^- \rightarrow$ hadrons « voit » chaque seuil de production ($c\bar{c}$ à 3,77 GeV, $b\bar{b}$ à 10,6 GeV) comme une marche du rapport R (chap. 12, exemple 12.8) : on *mesure* des distributions de Dirac dans les collisionneurs. Le choix du signe $\mp i\varepsilon$ (retardé/avancé/Feynman) est le même choix de conditions aux limites que pour les potentiels retardés (chap. 18, §18.6).

3.7 Exercices corrigés

Exercice 3.1 (★) — Ordre du dipôle

Montrer que δ'_0 est d'ordre exactement 1 (pas 0).

Solution détaillée

(1) L'ordre est ≤ 1 par définition ($|\varphi'(0)| \leq \sup |\varphi'|$). (2) S'il était d'ordre 0, on aurait $|\varphi'(0)| \leq C \sup_K |\varphi|$ pour toute $\varphi \in C_c^\infty(K)$. Prenons $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)\theta(x)$ (θ plateau valant 1 près de 0) : $\sup |\varphi_n| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ mais $\varphi'_n(0) = \cos(0) = 1$. Contradiction. ✓

Exercice 3.2 (★★) — Équation $xT = 0$

Résoudre $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, puis $xT = 1$, puis $x^2T = 0$.

Solution détaillée

(1) $xT = 0$: si $\varphi \in C_c^\infty$ s'annule en 0, alors $\varphi = x\psi$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)dt \in C_c^\infty$ (vérifier le support et la régularité) ; donc $\langle T, \varphi \rangle = \langle xT, \psi \rangle = 0$. T ne dépend que de $\varphi(0)$: $T = c\delta_0$. Réciproquement $x\delta_0 = 0$. *Solution générale* : $T = c\delta_0$. (2) $xT = 1$: une solution particulière est $\text{vp} \frac{1}{x}$ (contre $\varphi : \langle x \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim \int_{|x|>\varepsilon} \varphi = \int \varphi$). Solution générale : $T = \text{vp} \frac{1}{x} + c\delta_0$. (3) $x^2T = 0$: en factorisant $x(xT) = 0$, on a $xT = c\delta_0$; or $x(-c\delta'_0) = c\delta_0$ (exemple 3.14(iii)), donc $x(T + c\delta'_0) = 0$ et $T = -c\delta'_0 + c'\delta_0$. *Solution générale* : $T = a\delta_0 + b\delta'_0$: la dimension de l'espace des solutions égale la multiplicité du zéro. Ce calcul est exactement celui qui fixe l'ambiguïté des propagateurs $((\omega^2 - \omega_0^2)\hat{G} = 1$ définit $\hat{G}$ à $a\delta + b\delta'$ près : le choix est la *condition aux limites* — retardé, avancé, Feynman). ✓

Exercice 3.3 (★★) — Dérivée de $\log|x|$ et partie finie

Justifier $(\log|x|)' = \text{vp} \frac{1}{x}$ en détail, puis calculer $(\text{vp} \frac{1}{x})'$ et l'identifier à la « partie finie » — $\text{Pf} \frac{1}{x^2}$ définie par $\langle \text{Pf} \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon} [\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi}{x^2} - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}]$.

Solution détaillée

(1) $\log|x| \in L^1_{\text{loc}}$ (exemple 1.9 : divergence logarithmique intégrable). $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = -\int \log|x| \varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon} \int_{|x|>\varepsilon} \log|x| \varphi'$. (2) IPP sur (ε, ∞) et $(-\infty, -\varepsilon)$: termes de bord $\log \varepsilon [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] = \mathcal{O}(\varepsilon \log \varepsilon) \rightarrow 0$, et il reste $\lim \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi}{x} = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle$. (3) Pour la dérivée seconde, même mécanique : $\langle (\text{vp} \frac{1}{x})', \varphi \rangle = -\lim \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'}{x}$; IPP : $-\left[\frac{\varphi}{x}\right]_{|x|=\varepsilon}^\infty - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi}{x^2}$; le terme de bord vaut $\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon)$, d'où exactement $-\text{Pf} \frac{1}{x^2}$. La « partie finie » de Hadamard soustrait le *contre-terme divergent minimal* : c'est un prototype de renormalisation soustractive. ✓

Exercice 3.4 (★★★) — Limite thermodynamique d'un réseau de charges

Soit $T_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n^2}^{n^2} \delta_{k/n}$. Montrer que $T_n \rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \cdot \lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue... est *faux* ; identifier la vraie limite et le taux de convergence contre $\varphi \in C_c^\infty$.

Solution détaillée

(1) $\langle T_n, \varphi \rangle = \frac{1}{2n} \sum_k \varphi(k/n)$: pour n assez grand, $\text{supp } \varphi \subset [-n, n]$ et la somme est une somme de Riemann de pas $1/n$ multipliée par $\frac{1/n}{2/n} = \frac{1}{2}$... Précisément $\frac{1}{2n} \sum_k \varphi(k/n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_k \varphi(k/n) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi$. (2) Donc $T_n \rightarrow \frac{1}{2} \lambda$ (la moitié de Lebesgue) : une suite de mesures *atomiques* converge vers une mesure *diffuse* — les distributions unifient les deux mondes. (3) Taux : pour $\varphi \in C_c^2$, l'erreur des sommes de Riemann du point milieu est $\mathcal{O}(n^{-2})$ (Euler–Maclaurin) ; ici points entiers/ n donc $\mathcal{O}(n^{-1})$ en général, $\mathcal{O}(n^{-2})$ après symétrisation. C'est le mécanisme *réseau* $\rightarrow$ *continuum* de la théorie des champs sur réseau : le pas $a = 1/n$ est le cut-off, et les corrections en puissances de a sont les « artefacts de réseau ». ✓

Chapitre 4

Convolution des distributions et solutions élémentaires

La convolution, déjà rencontrée pour les fonctions (chapitre 2), s'étend aux distributions et y déploie toute sa puissance : résoudre une EDP linéaire à coefficients constants se ramène à convoler le second membre par une solution élémentaire. Ce chapitre construit l'outillage (support compact, produit tensoriel, convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$) et démontre ce principe général.

Prérequis / rappel

Chapitre 3 en entier. On rappelle qu'une application linéaire entre espaces de suites/fonctions munis de convergences est continue ssi elle transforme suites convergentes en suites convergentes, et que C_c^∞ est stable par translation $\tau_a \varphi = \varphi(\cdot - a)$ et par symétrie $\check{\varphi} = \varphi(-\cdot)$.

4.1 Distributions à support compact

Définition 4.1. $\mathcal{E}'(\Omega)$ désigne l'espace des distributions à support compact dans Ω .

Proposition 4.2. (i) Toute $T \in \mathcal{E}'$ est d'ordre fini. (ii) $T \in \mathcal{E}'$ se prolonge canoniquement en forme linéaire continue sur $C^\infty(\Omega)$ tout entier (sans condition de support sur les fonctions test) : on pose $\langle T, f \rangle := \langle T, \theta f \rangle$ où $\theta \in C_c^\infty$ vaut 1 près de $\text{supp } T$, et le résultat ne dépend pas de θ .

Démonstration. (1) (i) Soit $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ valant 1 sur un voisinage de $K = \text{supp } T$ (exercice 2.3). Pour toute φ , $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \theta \varphi \rangle$ (la différence $(1 - \theta)\varphi$ est nulle près de K). Le critère (3.1) sur le compact fixe $\text{supp } \theta$ donne un ordre uniforme $p = p_{\text{supp } \theta}$. (2) (ii) Si θ_1, θ_2 valent toutes deux 1 près de K , $(\theta_1 - \theta_2)f$ est nulle près de K , donc $\langle T, (\theta_1 - \theta_2)f \rangle = 0$. La continuité sur C^∞ (muni de la convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées) résulte de (3.1). $\square$

Exemple 4.3. δ_a , $\partial^\alpha \delta_a$, toute mesure à support compact, toute $f \in L^1$ à support compact. Contre-exemple : $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$, $\text{vp } \frac{1}{x}$, le peigne III ne sont pas dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

4.2 Produit tensoriel de distributions

Théorème 4.4 (Produit tensoriel). Soient $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)$. Il existe une unique distribution $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{p+q})$ telle que

$$\langle S \otimes T, \varphi(x)\psi(y) \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^p), \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q),$$

et pour toute $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{p+q})$ on a la formule de Fubini distributionnelle

$$\langle S \otimes T, \Phi \rangle = \left\langle S, x \mapsto \langle T, \Phi(x, \cdot) \rangle \right\rangle.$$

Schéma de preuve. (1) *Bonne définition du membre de droite* : la fonction $x \mapsto \langle T, \Phi(x, \cdot) \rangle$ est C^∞ à support compact — la dérivation sous le crochet est licite car les taux d'accroissement de $\Phi(x+h, \cdot)$ convergent dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^q)$ (support commun, dérivées uniformes), et la continuité de T transporte la convergence. (2) *Unicité* : les combinaisons de produits $\varphi(x)\psi(y)$ sont denses dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^{p+q})$ (régularisation + polynômes de Bernstein sur un pavé, ou noyau produit) ; deux candidats coïncident sur une partie dense et sont continus. (3) *Symétrie Fubini* : le même argument montre que l'autre itération définit la même distribution (elles coïncident sur les produits). Détails : Golse, ch. 4.3. $\square$

Exemple 4.5. $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$; $\delta_0 \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{R}^q}$ est la « masse uniforme portée par l'hyperplan $x = 0$ » : $\langle \delta_0 \otimes 1, \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^q} \Phi(0, y) dy$. Les distributions portées par des sous-variétés (couches simples et doubles de l'électrostatique) sont toutes de ce type dans des coordonnées adaptées.

4.3 Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$

Définition 4.6 (Convolution distribution–fonction test). Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T_y, \varphi(x - y) \rangle.$$

C'est une fonction C^∞ (dérivation sous le crochet), et $\partial^\alpha(T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$.

Exemple 4.7 (La convolution qui rend tout concret). $\delta_0 * \varphi = \varphi$: la masse de Dirac est l'élément neutre. $\delta_a * \varphi = \tau_a \varphi$ (translation) ; $\delta'_0 * \varphi = \varphi'$ (dérivation). Toute opération linéaire invariante par translation est une convolution — voilà pourquoi la convolution est l'algèbre naturelle de la physique homogène dans l'espace.

Théorème 4.8 (Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$). Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, il existe une unique $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle.$$

Elle vérifie : (i) $T * S = S * T$; (ii) $\partial^\alpha(T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$; (iii) $\delta_0 * T = T$; (iv) $\text{supp}(T * S) \subset \text{supp } T + \text{supp } S$; (v) la convolution est séparément continue.

Éléments de preuve. La fonction $x \mapsto \langle S_y, \varphi(x + y) \rangle$ est dans C_c^∞ (support $\subset \text{supp } \varphi - \text{supp } S$, compact ; régularité par dérivation sous crochet, prop. 4.2(ii)) : le membre de droite a un sens. (ii) : transférer ∂^α sur φ et utiliser $\partial_x^\alpha \varphi(x + y) = \partial_y^\alpha \varphi(x + y)$. (i) et l'associativité (quand deux des trois facteurs sont à support compact) suivent du théorème 4.4. (iii) : calcul direct. (iv) : comme prop. 2.5(iii). $\square$

Attention — piège classique

Sans hypothèse de support, la convolution de deux distributions n'existe pas en général ($\mathbf{1} * \mathbf{1}$ diverge). Règle pratique : *au plus un facteur à support non compact*. Une exception utile : supports tous deux limités à gauche sur $\mathbb{R}$ (algèbre de convolution causale $\mathcal{D}'_+$), cadre naturel des systèmes causaux et du calcul opérationnel de Heaviside.

4.4 Solutions élémentaires : le principe général

Définition 4.9 (Solution élémentaire). Soit $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Une *solution élémentaire* (ou fonction de Green sur $\mathbb{R}^N$ entier) est une $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$P(\partial) E = \delta_0.$$

Théorème 4.10 (Principe de superposition). *Si E est solution élémentaire de $P(\partial)$ et $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors*

$$u = E * f$$

*vérifie $P(\partial)u = f$. Réciproquement, toute solution à support convenable diffère de $E * f$ par une solution de l'équation homogène.*

Démonstration. Par le théorème 4.8(ii)–(iii) : $P(\partial)(E * f) = (P(\partial)E) * f = \delta_0 * f = f$. Pour la réciproque : si $P(\partial)u = P(\partial)v = f$, alors $P(\partial)(u - v) = 0$. $\square$

Intuition

Physique du principe : δ_0 est la *source unité instantanée/ponctuelle* ; E est la réponse du milieu à cette source (réponse impulsionnelle, champ d'une charge unité, onde émise par un flash). Une source étendue f est une superposition de sources ponctuelles $f = \int f(y)\delta_y dy$ — au sens des distributions — et la linéarité superpose les réponses : $u(x) = \int E(x - y)f(y) dy$. *Tout le chapitre 7 et le chapitre 8 consistent à calculer les E des quatre grands opérateurs* ; le propagateur de la théorie des champs (chapitres 11–12) est exactement la solution élémentaire de l'opérateur quadratique de l'action.

Théorème 4.11 (Malgrange–Ehrenpreis (admis)). *Tout opérateur $P(\partial) \neq 0$ à coefficients constants possède une solution élémentaire dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

Ce théorème d'existence générale (démontré via la transformation de Fourier et une division délicate par le polynôme $P(i\xi)$) garantit que le principe de superposition n'est jamais vide. En pratique, on calcule E explicitement cas par cas — c'est l'objet de la partie B.

Exemple 4.12 (Solution élémentaire de $\frac{d}{dx}$ et de l'oscillateur). (i) $E = H$ (Heaviside) vérifie $E' = \delta_0$ (théorème 3.12) : la primitive causale. (ii) Oscillateur harmonique $u'' + \omega^2 u$: cherchons E causale (nulle pour $t < 0$) de la forme $E = H(t)g(t)$ avec g lisse. La formule des sauts (3.4) donne $E' = Hg' + g(0)\delta_0$ et $E'' = Hg'' + g'(0)\delta_0 + g(0)\delta'_0$. Donc $E'' + \omega^2 E = H(g'' + \omega^2 g) + g'(0)\delta_0 + g(0)\delta'_0$: il faut $g'' + \omega^2 g = 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, soit $g(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$:

$$E(t) = H(t) \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

la *fonction de Green retardée* de l'oscillateur. La réponse à un forçage f est $u(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega(t-s)}{\omega} f(s) ds$ — la formule de Duhamel, ici démontrée en trois lignes de calcul distributionnel.

Application finance / signal

En microstructure de marché, l'*impact price* transitoire d'un métaordre est modélisé par $p(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{Q}(s) ds$ — convolution du flux d'ordres par un noyau causal G (propagator model de Bouchaud). L'estimation de G est un problème de déconvolution ; sa causalité et sa décroissance lente ($G(t) \sim t^{-\beta}$) font de $\mathcal{D}'_+$ le cadre naturel. Le TD 4 estime un tel noyau sur données simulées Hawkes (`optimizr.simulate_hawkes`).

Au notebook compagnon

TD 4 du notebook — fonction de Green de l'oscillateur amorti : animation de la réponse impulsionnelle et convolution numérique $E * f$ pour divers forçages ; comparaison avec l'intégration directe (`scipy.solve_ivp`) ; noyau d'impact causal estimé sur un flux de Hawkes (`optimizr.simulate_hawkes, two_sided_intensities`).

4.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 4.13 (Les potentiels retardés : la convolution qui transporte la causalité). L'équation des potentiels en jauge de Lorenz, $\square A^\nu = \mu_0 j^\nu$ (chap. 18), se résout par convolution avec la fonction de Green retardée du d'Alembertien (18.8) :

$$A^\nu = G_{\text{ret}} * j^\nu \cdot \mu_0 \implies A^\nu(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j^\nu(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3y.$$

Trois leçons structurelles. **(1)** Le support de G_{ret} est *sur* le cône de lumière passé : chaque point reçoit la nouvelle électromagnétique avec le retard exact $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c$, ni avant ni après (principe de Huygens fort, spécifique à la dimension 3+1, chap. 9). **(2)** La causalité de la convolution (propriété des supports, thm. 4.8) : si la source s'allume à $t = 0$, le potentiel est rigoureusement nul pour $t < |\mathbf{x}|/c$ — aucune fuite supraluminique, théorème et pas postulat. **(3)** Application chiffrée : une antenne dipolaire émettant à $f = 100$ MHz ($\lambda = 3$ m) : à 30 km, le champ reçu à l'instant t a été émis 100 μ s plus tôt ; la structure en $j(t-r/c)/r$ explique à la fois l'affaiblissement en $1/r$ du champ de rayonnement *et* la conservation de la puissance totale ($|E|^2 \cdot r^2 = \text{cste}$). Le même schéma « Green causale * source » structure la réponse linéaire (chap. 15) : la susceptibilité *est* une fonction de Green retardée.

Exemple 4.14 (La factorisation QCD : la section efficace comme convolution). Le calcul le plus important de la physique des collisionneurs est une convolution. Un proton n'est pas une particule élémentaire : à haute énergie, il apparaît comme un flux de *partons* (quarks, gluons) portant chacun une fraction x de son impulsion, décrit par les densités $f_q(x, Q^2)$ (PDF). Le théorème de factorisation écrit la section efficace hadronique comme

$$\sigma(pp \rightarrow X) = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_a(x_1, Q^2) f_b(x_2, Q^2) \hat{\sigma}_{ab \rightarrow X}(x_1 x_2 s, Q^2),$$

convolution multiplicative (structure de Mellin : elle diagonalise en moments, exactement comme la convolution additive diagonalise en Fourier, chap. 5) entre le *long-distance* non perturbatif (f_a , mesuré) et le *court-distance* perturbatif ($\hat{\sigma}$, calculé en diagrammes, chap. 12). **Application — production du boson Z au LHC** : $\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow Z) \propto \delta(x_1 x_2 s - M_Z^2)$: la distribution de Dirac de la résonance « lit » les PDF le long de l'hyperbole $x_1 x_2 = M_Z^2/s$ ($\approx 4,3 \times 10^{-5}$ au LHC 13 TeV) : mesurer la rapidité du Z , c'est *scanner* $f_q(x)$ — la machine fait l'appariement $\langle \delta, f \otimes f \rangle$ pour nous. La dépendance en Q^2 des PDF est traitée à l'exemple 6.7 (équations DGLAP) et refermée au chapitre 16.

4.6 Exercices corrigés

Exercice 4.1 (★) — Algèbre des Dirac

Calculer $\delta_a * \delta_b$, puis $\delta'_a * \delta'_b$, puis $(\delta_a - \delta_0) * (\delta_b - \delta_0)$.

Solution détaillée

(1) $\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle = \langle (\delta_a)_x, \langle (\delta_b)_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \varphi(a+b)$: $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ — la convolution des Dirac *est* l'addition du groupe. **(2)** $\delta'_a * \delta'_b = \delta''_{a+b}$ (transférer les deux dérivées). **(3)** $\delta_{a+b} - \delta_a - \delta_b + \delta_0$: l'opérateur aux différences finies double — utile pour discrétiser les EDP. ✓

Exercice 4.2 (★★) — Équation de la corde pincée

Trouver la solution élémentaire causale de l'opérateur de transport amorti $L = \frac{d}{dt} + \gamma$ ($\gamma > 0$), puis résoudre $u' + \gamma u = f$ pour $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et vérifier l'unicité dans les distributions causales.

Solution détaillée

(1) Cherchons $E = H(t)g(t) : E' + \gamma E = H(g' + \gamma g) + g(0)\delta_0$; il faut $g' = -\gamma g$, $g(0) = 1$: $E = H(t)e^{-\gamma t}$. (2) $u = E * f : u(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} f(s) ds$ (pour f fonction) — le filtre exponentiel EWMA omniprésent en traitement du signal et en finance (moyennes mobiles exponentielles). (3) Unicité causale : si $v' + \gamma v = 0$ et $\text{supp } v \subset [T, \infty)$, alors $(e^{\gamma t} v)' = 0$ donc $e^{\gamma t} v = c$ constante ; le support limité à gauche force $c = 0$. ✓

Exercice 4.3 (★★) — Couche simple et formule des sauts N -dimensionnelle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné à bord C^1 et $u \in C^2(\overline{\Omega})$, prolongée par 0 hors de Ω . Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:

$$\Delta(u\mathbf{1}_\Omega) = \{\Delta u\}\mathbf{1}_\Omega + \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_{\partial\Omega} + \text{div}(u n d\sigma_{\partial\Omega}),$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface (couche simple) et le dernier terme une couche double.

Solution détaillée

(1) Contre $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) : \langle \Delta(u\mathbf{1}_\Omega), \varphi \rangle = \int_\Omega u \Delta \varphi dx$. (2) Deux applications de la formule de Green (cor. 1.12) : $\int_\Omega u \Delta \varphi = \int_\Omega \Delta u \varphi + \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$. (3) On identifie terme à terme : $\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \langle \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma, \varphi \rangle$ (couche simple, signe + après transfert), et $\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \langle -\text{div}(u n d\sigma), \varphi \rangle$ au sens des distributions (couche double = distribution d'ordre 1 portée par la surface). En électrostatique : densité surfacique de charge (couche simple, saut du champ normal) et densité de dipôles (couche double, saut du potentiel). ✓

Exercice 4.4 (★★★) — Convolution et régularité : le lissage de Green

Soit $E = H(t)e^{-\gamma t}$ (exercice 4.2). Montrer que pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, $u = E * f \in H^1(\mathbb{R})$ (dérivée L^2), et que l'application $f \mapsto u$ gagne exactement un cran de dérivabilité L^2 . Commenter en terme de « régularisation elliptique ».

Solution détaillée

(1) $u = E * f$ est bien définie ($E \in L^1$ + support compact de f) et $u' + \gamma u = f$ au sens des distributions (théorème 4.10). (2) Donc $u' = f - \gamma u$; il suffit que $u \in L^2$. Young (prop. 2.5(ii)) avec $E \in L^1$, $f \in L^2 : \|u\|_{L^2} \leq \|E\|_{L^1} \|f\|_{L^2} = \gamma^{-1} \|f\|_{L^2}$. (3) Ainsi $\|u'\|_{L^2} \leq 2\|f\|_{L^2} : u \in H^1$ avec contrôle. Le gain est *exactement* d'ordre 1, l'ordre de l'opérateur : c'est le prototype du *gain de régularité elliptique* ($u \in H^{s+m}$ si $f \in H^s$, P elliptique d'ordre m) que la transformation de Fourier rendra transparent au chapitre 5 : diviser par le symbole $P(i\xi)$ fait gagner $|\xi|^{-m}$. ✓

Chapitre 5

Transformation de Fourier et distributions tempérées

La transformation de Fourier diagonalise *simultanément* toutes les dérivations : $\partial_{x_j} \mapsto i\xi_j$. Convolutions, EDP à coefficients constants, propagateurs — tout devient multiplication. Ce chapitre construit le cadre exact où cette magie opère sans douleur : la classe de Schwartz $\mathcal{S}$ et son dual $\mathcal{S}'$, les distributions tempérées.

Prérequis / rappel

Chapitres 1–4. Convention adoptée (celle de Golse) :

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx.$$

Avec cette convention, l'inversion porte un $(2\pi)^{-N}$: $f(x) = (2\pi)^{-N} \int e^{+i\xi \cdot x} \widehat{f}(\xi) d\xi$, et Plancherel s'écrit $\|f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2$.

5.1 La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Définition 5.1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide : pour tous multi-indices α, β ,

$$p_{\alpha\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty.$$

$f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{S}$ si $p_{\alpha\beta}(f_n - f) \rightarrow 0$ pour tous α, β .

Exemple 5.2. Les gaussiennes $e^{-a|x|^2}$ ($a > 0$), les $P(x)e^{-|x|^2}$ (fonctions d'Hermite!), tout C_c^∞ . Pas dans $\mathcal{S}$: $e^{-|x|}$ (non lisse en 0), $(1+|x|^2)^{-1}$ (décroissance polynomiale seulement), $e^{-x^2} \sin(e^{x^2})$ (les dérivées ne décroissent pas).

L'intérêt de $\mathcal{S}$: c'est le *plus grand espace naturellement stable* par les quatre opérations ∂^α , $x^\beta \cdot$, $\mathcal{F}$, $*$ — comme le montre le théorème suivant.

Théorème 5.3 ($\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}$). Pour $f \in \mathcal{S}$:

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad (5.1)$$

$$\mathcal{F}(x^\beta f)(\xi) = (i)^{|\beta|} \partial^\beta \widehat{f}(\xi), \quad (5.2)$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \widehat{g}, \quad \mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \widehat{f} * \widehat{g}, \quad (5.3)$$

et $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est linéaire, continue, bijective, d'inverse

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{+i\xi \cdot x} g(\xi) d\xi = (2\pi)^{-N} \mathcal{F}g(-x). \quad (5.4)$$

Démonstration. (1) (5.1) : intégration par parties (1.3), licite car tout décroît rapidement ; chaque ∂_{x_j} sort un facteur $i\xi_j$. (2) (5.2) : dérivation sous l'intégrale (dominée par $|x^\beta f| \in L^1$). (3) Ces deux règles montrent que $\xi^\beta \partial^\alpha \hat{f} = \pm \mathcal{F}(\partial^\beta (x^\alpha f))$ est bornée (transformée d'une L^1) : $\hat{f} \in \mathcal{S}$, et la continuité suit des mêmes estimations. (4) (5.3) première formule : Fubini, $\int e^{-i\xi x} \int f(x-y)g(y)dy dx$, changement $x \rightarrow x+y$. (5) *Inversion.* Le calcul pivot est la transformée de la gaussienne : pour $G_a(x) = e^{-a|x|^2}$,

$$\widehat{G}_a(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{N/2} e^{-|\xi|^2/4a}, \quad (5.5)$$

obtenu en complétant le carré dans (1.2) coordonnée par coordonnée (le déplacement de contour est justifié par le théorème de Cauchy appliqué au rectangle de hauteur $\xi_j/2a$: l'intégrande entière e^{-az^2} décroît sur les bords verticaux). Ensuite, pour $f \in \mathcal{S}$:

$$(2\pi)^{-N} \int e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|^2} d\xi = (2\pi)^{-N} \iint f(y) e^{i\xi(x-y)-\varepsilon|\xi|^2} dy d\xi = (f * g_\varepsilon)(x),$$

où $g_\varepsilon(u) = (4\pi\varepsilon)^{-N/2} e^{-|u|^2/4\varepsilon}$ est une approximation de l'unité gaussienne (utiliser (5.5) et Fubini). Quand $\varepsilon \rightarrow 0$: le membre de gauche tend vers $(2\pi)^{-N} \int e^{i\xi x} \widehat{f}$ (convergence dominée), le membre de droite vers $f(x)$ (théorème 2.6) : c'est (5.4). $\square$

Idée-clé

Retenir la gaussienne (5.5) sous forme mnémotechnique : la Fourier d'une gaussienne de largeur σ est une gaussienne de largeur $1/\sigma$. Étroit en espace $\iff$ large en fréquence : c'est le principe d'incertitude en germe, et la raison d'être de la limite $\delta_0 \leftrightarrow \widehat{\delta}_0 = 1$ ci-dessous.

Théorème 5.4 (Plancherel–Parseval). Pour $f, g \in \mathcal{S}$,

$$\int f \bar{g} dx = (2\pi)^{-N} \int \widehat{f} \widehat{\bar{g}} d\xi.$$

$\mathcal{F}$ se prolonge en isomorphisme de L^2 (isométrie à $(2\pi)^{N/2}$ près).

Démonstration. Poser $h = \overline{\mathcal{F}^{-1}g}$... le plus court : la formule d'échange $\int \widehat{f} \phi = \int f \widehat{\phi}$ (Fubini immédiat), appliquée à $\phi = (2\pi)^{-N} \overline{\mathcal{F}g}$ dont la transformée est $\bar{g}$ par (5.4). Le prolongement L^2 suit de la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 (cor. 2.7). $\square$

5.2 Distributions tempérées

Définition 5.5. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}$: $|\langle T, f \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} p_{\alpha\beta}(f)$. Pour $T \in \mathcal{S}'$, on définit

$$\langle \widehat{T}, f \rangle := \langle T, \widehat{f} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Comme $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est continue, $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$; et comme $\mathcal{F}$ est bijective sur $\mathcal{S}$, elle l'est sur $\mathcal{S}'$. La formule d'échange garantit la compatibilité avec les fonctions : $\widehat{\widehat{T}}_f = T_{\widehat{f}}$ pour $f \in L^1$.

Exemple 5.6 (Qui est tempéré?). Sont dans $\mathcal{S}'$: tout L^p ($1 \leq p \leq \infty$), les fonctions à croissance polynomiale, toutes les distributions à support compact, le peigne III, $\text{vp } \frac{1}{x}$. N'est pas tempéré : $e^{|x|}$, e^{x^2} (croissance trop rapide : le crochet contre une gaussienne diverge). Moralité : « tempéré = croissance au plus polynomiale, en un sens moyen ».

Exemple 5.7 (Le dictionnaire fondamental).

T	$\widehat{T}$	preuve en une ligne
δ_0	1	$\langle \widehat{\delta}_0, f \rangle = \widehat{f}(0) = \int f$
1	$(2\pi)^N \delta_0$	inversion appliquée à la ligne 1
δ_a	$e^{-ia\xi}$	translation
$\partial^\alpha \delta_0$	$(i\xi)^\alpha$	(5.1)
x^β	$(2\pi)^N i^{ \beta } \partial^\beta \delta_0$	(5.2)
H (Heaviside)	$\pi \delta_0 + \frac{1}{i} \text{vp} \frac{1}{\xi}$	Plemelj (3.2)
sgn	$\frac{2}{i} \text{vp} \frac{1}{\xi}$	$\text{sgn} = 2H - 1$
$e^{-a x ^2}$	$(\pi/a)^{N/2} e^{- \xi ^2/4a}$	(5.5)

La ligne H mérite le détail : $H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H e^{-\varepsilon x}$ dans $\mathcal{S}'$, et $\mathcal{F}(H e^{-\varepsilon x})(\xi) = \int_0^\infty e^{-(\varepsilon + i\xi)x} dx = \frac{1}{\varepsilon + i\xi} = \frac{1}{i} \frac{1}{\xi - i\varepsilon}$; Sokhotski–Plemelj (3.2) donne la limite $\frac{1}{i} (\text{vp} \frac{1}{\xi} + i\pi \delta_0)$.

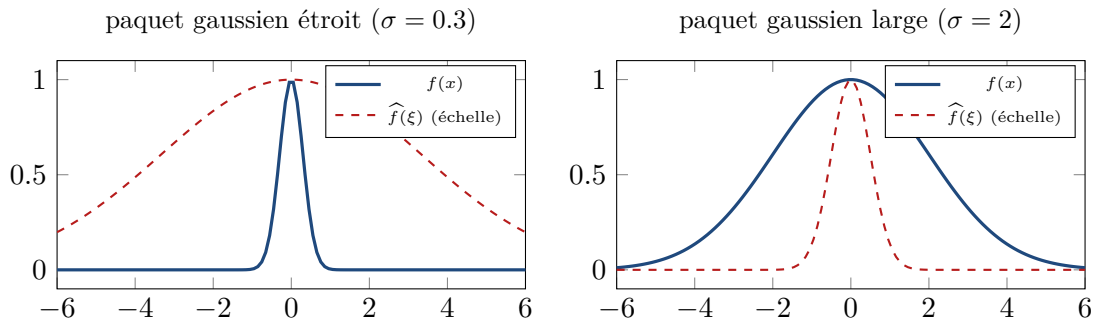


FIGURE 5.1 – Dualité largeur–fréquence : la transformée d’une gaussienne étroite est large et réciproquement. Cas limites : $\delta_0 \leftrightarrow 1$ (localisation parfaite $\leftrightarrow$ spectre plat).

5.3 Formule sommatoire de Poisson et échantillonnage

Théorème 5.8 (Poisson). Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\widehat{\text{III}} = 2\pi \text{III}_{2\pi} := 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}, \quad \text{soit, contre } f \in \mathcal{S} : \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi k). \quad (5.6)$$

Démonstration. (1) III est 1-périodique : $\tau_1 \text{III} = \text{III}$. En Fourier, $e^{-i\xi} \widehat{\text{III}} = \widehat{\text{III}}$, donc $\widehat{\text{III}}$ est portée par les zéros de $e^{-i\xi} - 1$, soit $\{2\pi k\}$. (2) Près de chaque $2\pi k$, le théorème 3.18 et l’équation $(e^{-i\xi} - 1) \widehat{\text{III}} = 0$ (zéro simple!) forcent $\widehat{\text{III}} = \sum_k c_k \delta_{2\pi k}$ sans dérivées ; la périodicité de III sous $x \mapsto x + 1$ ET l’invariance de III par dilatation... plus simplement, l’invariance par translation $\xi \mapsto \xi + 2\pi$ de l’équation donne $c_k = c$ constant. (3) La constante : tester contre la gaussienne $f = e^{-x^2/2}$ dont tout est explicite ; ou remarquer $\langle \widehat{\text{III}}, e^{-\varepsilon \xi^2} \rangle$ et faire $\varepsilon \rightarrow 0$. On trouve $c = 2\pi$ (avec notre convention). D’où (5.6) en testant $\langle \widehat{\text{III}}, f \rangle = \langle \text{III}, \widehat{f} \rangle$. $\square$

Application physique

(i) *Cristallographie* : le réseau réciproque d’un cristal est le support de la transformée de Fourier du réseau direct — les pics de Bragg sont (5.6) en dimension 3. (ii) *Échantillonnage de Shannon* : échantillonner un signal au pas a = multiplier par III_a = périodiser son

spectre au pas $2\pi/a$; si le signal est à bande limitée $[-\pi/a, \pi/a]$, les copies spectrales ne se recouvrent pas et le signal se reconstruit par interpolation sinc — sinon, *aliasing*. (iii) *Fonctions thêta et dualité température inverse* : appliquée aux gaussiennes, (5.6) donne $\theta(t) = \sum e^{-\pi n^2 t} = t^{-1/2} \theta(1/t)$ — l'identité modulaire qui échange haute et basse température dans les fonctions de partition (chapitre 13, où la fonction de partition de la particule sur un cercle la réalisera physiquement).

5.4 Espaces de Sobolev par Fourier

Définition 5.9. Pour $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}' : \widehat{u} \in L^2_{\text{loc}} \text{ et } \|u\|_{H^s}^2 = (2\pi)^{-N} \int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

$H^0 = L^2$; pour $s = m$ entier, $H^m = \{u \in L^2 : \partial^\alpha u \in L^2, |\alpha| \leq m\}$ (les deux normes sont équivalentes via (5.1)). L'échelle H^s mesure la régularité *en moyenne quadratique*, y compris fractionnaire et négative : $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^N) \iff s < -N/2$ (car $|\widehat{\delta}_0| = 1$ et $\int (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty$ ssi $2s < -N$).

Théorème 5.10 (Injection de Sobolev). *Si $s > N/2 + k$, alors $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^N)$: toute $u \in H^s$ (modifiée sur un négligeable) est C^k à dérivées bornées, avec $\|u\|_{C^k} \leq C \|u\|_{H^s}$.*

Démonstration. Pour $|\alpha| \leq k$, $\|\partial^\alpha u\|_\infty \leq (2\pi)^{-N} \int |\xi^\alpha| |\widehat{u}| \leq (2\pi)^{-N} \left(\int \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi \right)^{1/2} \|u\|_{H^s}$ par Cauchy–Schwarz; l'intégrale converge ssi $2s - 2|\alpha| > N$ (exemple 1.9), garanti par $s > N/2 + k$. La continuité de $\partial^\alpha u$ vient de la convergence dominée dans la formule d'inversion. $\square$

Application finance / signal

Le mouvement brownien fractionnaire B^H d'exposant de Hurst H a des trajectoires dans H^s_{loc} pour tout $s < H + \frac{1}{2}$: sa densité spectrale $\sim |\xi|^{-2H-1}$ rend le critère intégral transparent. L'injection de Sobolev redonne la régularité höldérienne $< H$ des trajectoires. Le TD 5 simule B^H (`optimizr.simulate_fbm`), estime H par régression spectrale et par `optimizr.estimate_hurst`, et visualise la correspondance pente spectrale $\leftrightarrow$ rugosité — le fondement empirique de la *volatilité rugueuse* ($H \approx 0.1$ sur les marchés).

Au notebook compagnon

TD 5 du notebook — dictionnaire de Fourier vérifié par FFT (gaussiennes, Heaviside régularisée, peigne fini et aliasing *animé*); inversion spectrale avec `optimizr.fourier_invert`; spectre du fBm et estimation de Hurst (`simulate_fbm`, `estimate_hurst`, `scale_dependent_hurst`).

5.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 5.11 (Diffraction cristalline : la loi de von Laue est une formule de Poisson). Un cristal de réseau $\Lambda = \{n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3\}$ a une densité électronique périodique, modélisable par $\rho = \rho_{\text{maille}} * \text{III}_\Lambda$ où $\text{III}_\Lambda = \sum_{R \in \Lambda} \delta_R$ est le peigne de Dirac du réseau. Une onde plane incidente $\mathbf{k}$ diffuse une amplitude proportionnelle à $\widehat{\rho}(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$. Or par le théorème de convolution et la formule de Poisson généralisée :

$$\widehat{\rho}(\mathbf{q}) = \widehat{\rho}_{\text{maille}}(\mathbf{q}) \cdot \widehat{\text{III}}_\Lambda(\mathbf{q}) = \widehat{\rho}_{\text{maille}}(\mathbf{q}) \cdot \frac{(2\pi)^3}{V_{\text{maille}}} \sum_{\mathbf{K} \in \Lambda^*} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{K}) :$$

l'intensité diffractée est *nulle sauf* si $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{K}$ appartient au *réseau réciproque* Λ^* (défini par $\mathbf{a}_i^* \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$) — c'est la condition de von Laue, équivalente à la loi de Bragg $2d\sin\theta = n\lambda$. Chaque tache de diffraction est une distribution de Dirac élargie par la taille finie du cristal (N mailles $\Rightarrow$ largeur $\propto 1/N$, hauteur $\propto N^2$: exactement le noyau de Dirichlet des séries de Fourier). L'intensité relative des taches est modulée par $|\hat{\rho}_{\text{maille}}(\mathbf{K})|^2$ (facteur de structure) : la cristallographie — de la première photo de Laue (1912) à la double hélice de l'ADN (cliché 51 de Franklin, 1952) — est de l'analyse de Fourier expérimentale : on mesure $|\hat{\rho}|^2$ et on inverse.

Exemple 5.12 (Maxwell dans l'espace de Fourier : polarisations et jauge). Appliquons la stratégie « Fourier diagonalise les EDP à coefficients constants » aux équations de Maxwell dans le vide. En transformant $\square A^\nu = 0$ (jauge de Lorenz, chap. 18) : $(\omega^2/c^2 - |\mathbf{k}|^2)\hat{A}^\nu = 0$, donc $\hat{A}^\nu$ est supporté par le cône $\omega = \pm c|\mathbf{k}|$ — une distribution singulière $\hat{A}^\nu \propto \delta(\omega^2/c^2 - k^2)$: la relation de dispersion du photon, sans masse ($\omega/k = c$ pour tout k : la lumière ne disperse pas dans le vide, contrairement à Schrödinger, chap. 9). **Comptage des polarisations** : A^μ a 4 composantes ; la condition de Lorenz $k_\mu \hat{A}^\mu = 0$ en retire une ; la jauge résiduelle $\hat{A}^\mu \rightarrow \hat{A}^\mu + ik^\mu \hat{\alpha}$ (avec $k^2 = 0$) en retire une seconde : il reste *deux* polarisations physiques, transverses — les deux états d'hélicité du photon. Ce comptage « $4 - 1 - 1 = 2$ », fait ici avec des distributions supportées sur le cône, est le même qui, non trivialement généralisé à $SU(3)$, donne les deux polarisations de chacun des huit gluons — et sa violation apparente en jauge covariante est compensée par les fantômes de Faddeev–Popov (au-delà de ce cours, [21]).

5.6 Exercices corrigés

Exercice 5.1 (★) — Transformée de la porte et Gibbs

Calculer $\widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}}$. Pourquoi la reconstruction tronquée $\int_{|\xi| \leq \Lambda}$ oscille-t-elle près des sauts (phénomène de Gibbs) ?

Solution détaillée

(1) $\int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$. (2) La décroissance n'est que $\mathcal{O}(1/|\xi|)$ — signature d'un saut (une dérivée distributionnelle contenant un Dirac). La troncature $|\xi| \leq \Lambda$ convole le signal par le noyau de Dirichlet $\frac{\sin \Lambda x}{\pi x}$, *non positif* (exemple 3.9(iii)) : ses lobes latéraux créent un dépassement de $\approx 9\%$ du saut, qui ne disparaît pas quand $\Lambda \rightarrow \infty$ (il se contracte seulement). Régulariser (fenêtre de Fejér, gaussienne) rétablit la positivité et tue Gibbs. ✓

Exercice 5.2 (★★) — Équation de Poisson spectrale

Résoudre $-\Delta u + m^2 u = f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ par Fourier ($m > 0$). Montrer $u \in H^{s+2}$ si $f \in H^s$; que se passe-t-il quand $m \rightarrow 0$?

Solution détaillée

(1) $(|\xi|^2 + m^2)\hat{u} = \hat{f}$, d'où $\hat{u} = \frac{\hat{f}}{|\xi|^2 + m^2}$: division *sans zéro* — l'opérateur de Klein–Gordon statique est inversible. (2) $(1 + |\xi|^2)^{s+2}|\hat{u}|^2 \leq C_m(1 + |\xi|^2)^s|\hat{f}|^2$ car $\frac{(1+|\xi|^2)}{|\xi|^2+m^2} \leq C_m$: gain de 2 crans, l'ordre de l'opérateur. (3) Quand $m \rightarrow 0$, la constante $C_m \sim m^{-2}$ explose : la division par $|\xi|^2$ est singulière en $\xi = 0$ — divergence *infrarouge*. La solution élémentaire correspondante $E_m(x)$ (le potentiel de Yukawa $\frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|}$ en $N = 3$, cf. chapitre 7) perd sa décroissance exponentielle et devient le potentiel coulombien $\frac{1}{4\pi|x|}$: la *portée* de l'interaction

est $1/m$. En théorie des champs : masse nulle $\iff$ interaction à longue portée $\iff$ corrélations critiques en loi de puissance (chapitre 10). ✓

Exercice 5.3 (★★) — Oscillateur harmonique et Hermite

Montrer que les fonctions d'Hermite $h_n(x) = (x - \frac{d}{dx})^n e^{-x^2/2}$ sont vecteurs propres de $\mathcal{F}$ (en dimension 1) avec valeurs propres $(-i)^n \sqrt{2\pi}$. Que dit ce spectre sur $\mathcal{F}^4$?

Solution détaillée

(1) Notons $A^\dagger = x - \frac{d}{dx}$ (opérateur de création). Par (5.1)–(5.2) : $\mathcal{F} \circ A^\dagger = \mathcal{F} \circ x - \mathcal{F} \circ \partial = i\partial_\xi \circ \mathcal{F} - i\xi \circ \mathcal{F} = -iA^\dagger \circ \mathcal{F}$. (2) Base : $\mathcal{F}e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$ (cas $a = \frac{1}{2}$ de (5.5)). Donc $\mathcal{F}h_n = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n$ par récurrence. (3) $\mathcal{F}^4 = (2\pi)^2 \text{Id}$: la transformation de Fourier est (à normalisation près) une rotation d'ordre 4 dans L^2 — c'est la rotation de $\pi/2$ dans l'espace des phases (x, ξ) , réalisée physiquement par un quart de période de l'oscillateur harmonique. Les états propres de l'oscillateur quantique *doivent* donc être vecteurs propres de $\mathcal{F}$: position et impulsion y jouent des rôles symétriques. ✓

Exercice 5.4 (★★★) — Principe d'incertitude de Heisenberg

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\|f\|_{L^2} = 1$, montrer

$$\left(\int x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left((2\pi)^{-1} \int \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{4},$$

avec égalité exactement pour les gaussiennes.

Solution détaillée

(1) Le second facteur est $\|f'\|_{L^2}^2$ par (5.1) et Plancherel. (2) Identité de commutation intégrée : $1 = \|f\|^2 = \int |f|^2 = -\int x \frac{d}{dx} |f|^2 dx = -2 \operatorname{Re} \int x \bar{f} f' dx$ (IPP, décroissance rapide). (3) Cauchy–Schwarz : $1 \leq 2 \|xf\|_{L^2} \|f'\|_{L^2}$, d'où le résultat en élevant au carré. (4) Égalité dans Cauchy–Schwarz ssi $f' = \lambda x f$ avec $\lambda < 0$ réel (pour que Re capte tout) : $f = Ce^{\lambda x^2/2}$, gaussienne. Interprétation quantique : $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$; interprétation signal : un signal ne peut être simultanément bref et à bande étroite ; interprétation trading : une moyenne mobile ne peut être à la fois réactive (support temporel court) et sélective en fréquence. ✓

Deuxième partie

Équations aux dérivées partielles fondamentales

Chapitre 6

L'équation de transport et la méthode des caractéristiques

Première EDP, la plus simple et la plus structurante : l'équation de transport. Sa résolution par la *méthode des caractéristiques* — suivre l'information le long de courbes — est un paradigme qui réapparaît dans les équations de Hamilton–Jacobi, les lois de conservation, et l'approximation semi-classique du chapitre 13.

Prérequis / rappel

Théorème de Cauchy–Lipschitz : le problème $\dot{X}(t) = b(t, X(t))$, $X(s) = x$ admet une unique solution locale si b est continue et localement lipschitzienne en x ; elle est globale si b est à croissance au plus linéaire. On note $X(t; s, x)$ le *flot* : la position à l'instant t de la particule qui était en x à l'instant s .

6.1 Transport à coefficients constants

Théorème 6.1. *Le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + v \cdot \nabla_x u = 0 \quad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N), \quad u(0, x) = u_0(x) \in C^1,$$

admet l'unique solution C^1

$$u(t, x) = u_0(x - tv).$$

Démonstration. **(1) Existence :** $u(t, x) = u_0(x - tv)$ est C^1 et $\partial_t u = -v \cdot \nabla u_0(x - tv) = -v \cdot \nabla_x u$. **(2) Unicité :** soit u une solution ; posons $\phi(t) = u(t, x_0 + tv)$ (valeur le long de la droite caractéristique). Alors $\phi'(t) = \partial_t u + v \cdot \nabla_x u = 0$: ϕ est constante, donc $u(t, x_0 + tv) = u_0(x_0)$, soit $u(t, x) = u_0(x - tv)$ en posant $x = x_0 + tv$. $\square$

Intuition

La solution est l'onde de profil u_0 qui *glisse* à vitesse v sans se déformer. L'information voyage le long des droites $x = x_0 + tv$: les *caractéristiques*. Deux conséquences physiques immédiates : la vitesse de propagation est *finie* (et vaut exactement $|v|$), et il n'y a *aucun lissage* — un créneau reste un créneau, contrairement à la chaleur (chapitre 8) qui lisse instantanément.

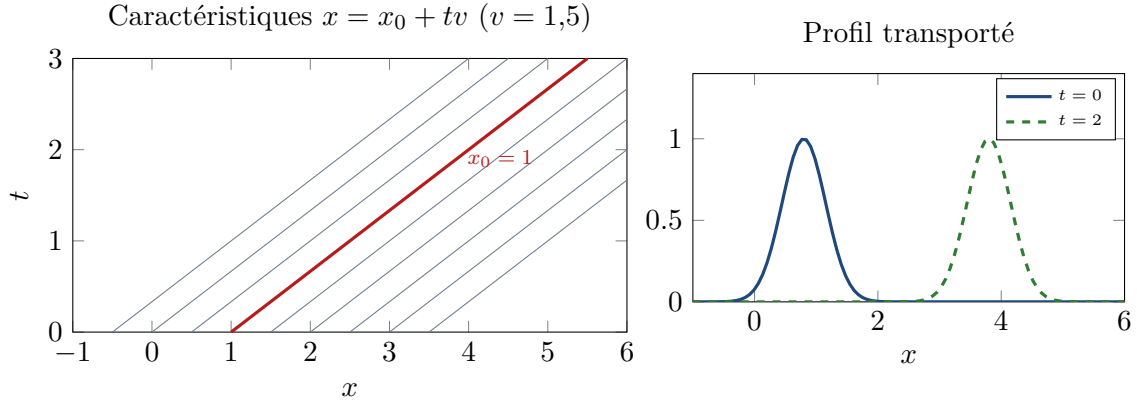


FIGURE 6.1 – Transport constant : l'information suit les droites caractéristiques (gauche) ; le profil glisse sans déformation (droite).

6.2 Coefficients variables et formule intégrée

Théorème 6.2 (Transport à coefficients variables). *Soit $b(t, x)$ de classe C^1 , à croissance au plus linéaire en x . Le problème*

$$\partial_t u + b(t, x) \cdot \nabla_x u + c(t, x) u = f(t, x), \quad u(0, \cdot) = u_0 \in C^1,$$

admet pour unique solution C^1

$$u(t, x) = u_0(X(0; t, x)) e^{-\int_0^t c(s, X(s; t, x)) ds} + \int_0^t f(s, X(s; t, x)) e^{-\int_s^t c(\tau, X(\tau; t, x)) d\tau} ds. \quad (6.1)$$

Démonstration. (1) Le long de la caractéristique $t \mapsto X(t; s, x)$ (Cauchy–Lipschitz), posons $\phi(t) = u(t, X(t; 0, x_0))$:

$$\phi'(t) = [\partial_t u + b \cdot \nabla u](t, X(t)) = -c(t, X(t)) \phi(t) + f(t, X(t)).$$

C'est une EDO linéaire du premier ordre en ϕ : facteur intégrant $e^{\int_0^t c}$, d'où $\phi(t) = \phi(0) e^{-\int_0^t c} + \int_0^t f(s) e^{-\int_s^t c} ds$. (2) On revient aux variables (t, x) en inversant le flot : $x_0 = X(0; t, x)$ (le flot est un difféomorphisme, d'inverse le flot rétrograde), ce qui donne (6.1). (3) L'unicité découle du même calcul : toute solution est déterminée le long de chaque caractéristique par sa donnée initiale, et les caractéristiques remplissent $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. $\square$

Exemple 6.3 (Compression et dilatation). $\partial_t u + x \partial_x u = 0$, u_0 donné : caractéristiques $\dot{X} = X$, soit $X(t) = x_0 e^t$; solution $u(t, x) = u_0(x e^{-t})$. Le profil est *dilaté* d'un facteur e^t : les caractéristiques divergent (fuite exponentielle), la donnée s'étale. Avec $b = -x$: compression, toute la donnée converge vers l'origine sans jamais l'atteindre. La divergence $\operatorname{div} b$ gouverne la compression des volumes (formule de Liouville $J(t) = \exp \int_0^t \operatorname{div} b$) : c'est le germe du théorème de Liouville de la mécanique hamiltonienne ($\operatorname{div} b = 0$ pour un flot hamiltonien $\Rightarrow$ conservation du volume de phase — fondement de la mesure microcanonique du chapitre 10).

Application physique

L'équation de *Liouville–Vlasov* $\partial_t f + p \cdot \nabla_x f - \nabla V \cdot \nabla_p f = 0$ transporte la densité de phase $f(t, x, p)$ le long du flot hamiltonien : c'est l'équation de transport dans $\mathbb{R}^{2N}$. La hiérarchie Vlasov $\rightarrow$ Fokker–Planck $\rightarrow$ hydrodynamique — chaque niveau ajoutant un terme diffusif ou une fermeture — organise *toute* la physique statistique hors équilibre. Le chapitre 8 ajoutera la diffusion ; le TD 9 résoudra Fokker–Planck avec

```
optimizr.fokker_planck_constant.
```

6.3 EDP non linéaires d'ordre 1 : Burgers et les chocs

Exemple 6.4 (Équation de Burgers sans viscosité).

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0.$$

La vitesse de transport est la solution *elle-même* : les caractéristiques sont les droites $x = x_0 + t u_0(x_0)$, le long desquelles u est constante ($= u_0(x_0)$) : mêmes deux lignes de preuve que le théorème 6.1, tant que les caractéristiques ne se croisent pas.

Proposition 6.5 (Temps d'explosion). *Si $\inf u'_0 = -m < 0$, les caractéristiques se croisent au temps $t^* = 1/m$, et la solution classique cesse d'exister : $\partial_x u$ explose (onde de choc).*

Démonstration. Deux caractéristiques issues de $x_0 < x_1$ se croisent lorsque $x_0 + t u_0(x_0) = x_1 + t u_0(x_1)$, soit $t = -\frac{x_1 - x_0}{u_0(x_1) - u_0(x_0)}$: positif dès que u_0 décroît quelque part, minimal $= 1/m$ quand la pente tend vers $\inf u'_0$. Quantitativement, en dérivant l'équation, $w = \partial_x u$ satisfait le long des caractéristiques l'EDO de Riccati $\dot{w} = -w^2$, d'où $w(t) = \frac{w_0}{1 + t w_0}$: explosion en temps fini $t = -1/w_0$ exactement pour $w_0 < 0$. $\square$

Intuition

Physiquement : les zones rapides rattrapent les zones lentes, le profil se *cambr*e jusqu'à devenir vertical (fig. 6.2). La nature (gaz, trafic routier, marché en krach) résout la crise en créant une *discontinuité* — le choc — qui se propage à la vitesse de Rankine–Hugoniot $\dot{s} = \frac{u_- + u_+}{2}$ (moyenne des vitesses de part et d'autre), la seule compatible avec la forme conservative $\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = 0$ *au sens des distributions* : c'est notre formule des sauts (3.4) en action ! La théorie des *solutions faibles* (entropiques) des lois de conservation est la descendance directe du chapitre 3.

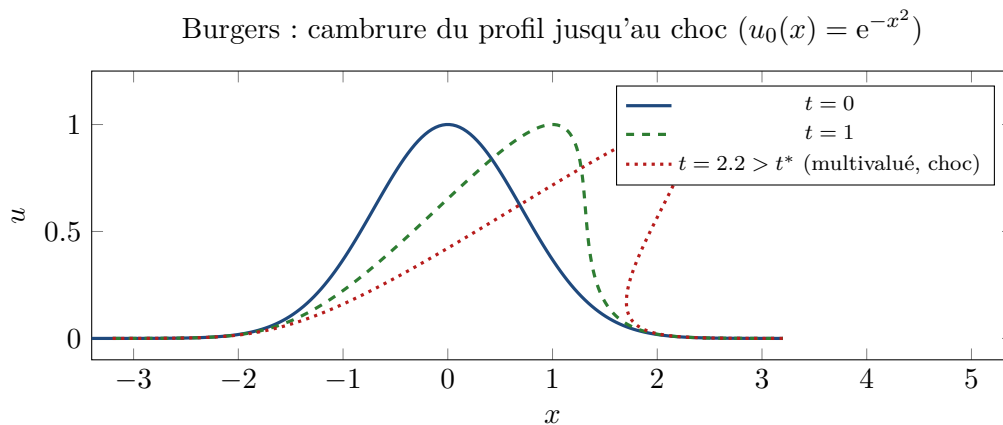


FIGURE 6.2 – Le profil de Burgers se cambr : à $t > t^* = \sqrt{e/2} \approx 1,17$ la courbe paramétrique devient multivaluée — la solution classique n'existe plus, un choc entropique la remplace.

Au notebook compagnon

TD 6 du notebook — animation du transport (profil glissant, caractéristiques), puis de Burgers : cambrure, temps critique $t^* = 1/\sup(-u'_0)$ vérifié numériquement,

choc de Rankine–Hugoniot par schéma de Godunov. Recherche du temps critique par `optimizr.differential_evolution` sur $-u'_0$.

6.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 6.6 (L'équation de continuité relativiste : la charge suit ses caractéristiques). La conservation de la charge, $\partial_\mu j^\mu = 0$, soit $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ pour un fluide chargé de vitesse $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, est une équation de transport : le long des lignes de courant $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{X})$ (les caractéristiques), $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$: la densité se dilue exactement au taux de divergence du flot — le jacobien du changement de variables lagrangien $\rightarrow$ eulérien (chap. 1) satisfait $\dot{J} = J \nabla \cdot \mathbf{v}$, donc $\rho J = \text{cste}$: la charge dans un volume matériel est transportée sans perte. **Trois incarnations** : (a) en électromagnétisme, $\partial_\mu j^\mu = 0$ est *automatique* par antisymétrie de $F^{\mu\nu}$ (chap. 18) : on ne peut pas écrire une théorie de Maxwell qui viole la conservation de la charge ; (b) en mécanique quantique, c'est le courant de probabilité de Noether (chap. 17, exemple 17.10) ; (c) en astrophysique, la même équation transporte la densité de matière noire le long du flot de Hubble — et ses caustiques (où $J \rightarrow 0$, croisée des caractéristiques comme pour Burgers) sont les murs et filaments de la toile cosmique : l'approximation de Zel'dovich est exactement notre équation de Burgers en cosmologie.

Exemple 6.7 (Les équations DGLAP : un transport dans l'échelle d'énergie). Les densités de partons $f_q(x, Q^2)$ de l'exemple 4.14 « coulent » quand on change la résolution Q : en sondant plus fin, un quark apparaît accompagné des gluons qu'il a rayonnés. L'équation d'évolution DGLAP

$$\frac{\partial f_q(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) f_q(z, Q^2) + [\text{gluons}]$$

est une équation de transport-convolution : le « temps » est $\tau = \ln Q^2$, la « vitesse » est le noyau de branchement P_{qq} (probabilité qu'un quark émette un gluon et garde la fraction x/z), et la convolution est multiplicative (Mellin, chap. 5) : en moments $M_n(Q^2) = \int_0^1 x^{n-1} f(x, Q^2) dx$, l'équation devient *diagonale*, $\frac{dM_n}{d\tau} = \frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi} \gamma_n M_n$, résoluble le long des caractéristiques comme au début de ce chapitre. **Conséquence observable** : les fonctions de structure mesurées à HERA *dépendent* de Q^2 — la « violation d'invariance d'échelle » — exactement au rythme prédit : la pente $\partial F_2 / \partial \ln Q^2$ mesurée sur trois décades de Q^2 est l'un des tests les plus précis de QCD et fournit $\alpha_s(M_Z) = 0,118$. Le flot de renormalisation du chapitre 16 n'est rien d'autre que ce transport, abstrait de son contexte.

6.5 Exercices corrigés

Exercice 6.1 (★) — Transport avec absorption

Résoudre $\partial_t u + 2\partial_x u + u = 0$, $u(0, x) = \sin x$.

Solution détaillée

Caractéristiques $x = x_0 + 2t$; le long d'elles $\phi' = -\phi$, donc $u(t, x) = e^{-t} \sin(x - 2t)$: l'onde glisse à vitesse 2 en s'amortissant. Vérification directe immédiate. ✓

Exercice 6.2 (★★) — Équation d'âge (McKendrick)

La densité de population $n(t, a)$ d'âge a satisfait $\partial_t n + \partial_a n = -\mu(a)n$ avec la natalité $n(t, 0) = \int_0^\infty \beta(a)n(t, a)da$. Résoudre le long des caractéristiques et donner la condition de croissance exponentielle (équation d'Euler–Lotka).

Solution détaillée

(1) Caractéristiques $a = t + \text{const}$: pour $a > t$ (individus déjà nés) $n(t, a) = n_0(a - t)e^{-\int_{a-t}^a \mu}$; pour $a < t$, $n(t, a) = B(t - a)e^{-\int_0^a \mu}$ où $B(t) = n(t, 0)$. (2) La condition de bord donne l'équation de renouvellement $B(t) = \int_0^t \beta(a)e^{-\int_0^a \mu} B(t - a) da + (\text{source des anciens})$: une convolution de Volterra causale (chapitre 4!). (3) Cherchant $B \propto e^{rt}$: $1 = \int_0^\infty \beta(a)e^{-ra - \int_0^a \mu} da$ — Euler-Lotka ; le taux de Malthus r est l'unique racine réelle (le membre de droite décroît de R_0 à 0) : croissance ssi $R_0 > 1$. ✓

Exercice 6.3 (★★) — Hamilton–Jacobi et la formule de Hopf–Lax

Pour $\partial_t S + \frac{1}{2} |\nabla_x S|^2 = 0$, $S(0, \cdot) = S_0$ convexe lisse, vérifier que les caractéristiques sont les droites du mouvement libre et que $S(t, x) = \min_y [S_0(y) + \frac{|x-y|^2}{2t}]$ (Hopf–Lax) résout l'équation là où le minimiseur est unique. Relier à la limite semi-classique de Schrödinger.

Solution détaillée

(1) Système caractéristique de Hamilton–Jacobi avec $H = \frac{1}{2}|p|^2$: $\dot{x} = p$, $\dot{p} = 0$: droites $x = y + tp_0$, $p_0 = \nabla S_0(y)$, le long desquelles $S = S_0(y) + t(p \cdot \dot{x} - H) = S_0(y) + \frac{t}{2}|p_0|^2$. (2) Le minimum de Hopf–Lax : la condition d'optimalité en y est $\nabla S_0(y) = \frac{x-y}{t}$, soit exactement $x = y + t\nabla S_0(y)$ — le point atteint par la caractéristique ; et la valeur est $S_0(y) + \frac{|x-y|^2}{2t} = S_0(y) + \frac{t}{2} |\nabla S_0(y)|^2$: identique. La convexité garantit un minimiseur unique pour t petit. (3) Pour Schrödinger $i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi$, l'ansatz WKB $\psi = A e^{iS/\hbar}$ donne à l'ordre $\hbar^0$ exactement Hamilton–Jacobi pour S : *la phase quantique se transporte le long des trajectoires classiques*. C'est l'annonce de la méthode du col sur l'intégrale de chemin (chapitre 13) : l'action stationnaire sélectionne la trajectoire classique. ✓

Chapitre 7

Laplacien, fonctions de Green et potentiel newtonien

L'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_j \partial_{x_j}^2$ règne sur la physique statique : électrostatique, gravitation, membranes à l'équilibre, marches aléatoires stationnaires. Ce chapitre calcule sa solution élémentaire, en déduit le potentiel newtonien, et démontre les propriétés qualitatives (moyenne, maximum, régularité) qui font des fonctions harmoniques les objets les plus rigides de l'analyse.

Prérequis / rappel

Chapitres 4 (solutions élémentaires, théorème 4.10) et 1 (Green, cor. 1.12 ; intégrabilité des puissances, exemple 1.9). Une fonction est *harmonique* sur Ω si $\Delta u = 0$.

7.1 La solution élémentaire du laplacien

Théorème 7.1. *Posons, pour $x \neq 0$,*

$$E_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x| & N = 2, \\ -\frac{1}{(N-2)|S^{N-1}|} \frac{1}{|x|^{N-2}} & N \geq 3 \quad \left(= -\frac{1}{4\pi|x|} \text{ si } N = 3 \right). \end{cases} \quad (7.1)$$

Alors $E_N \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $\Delta E_N = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. **(1) Intégrabilité locale :** $|E_N| \sim |x|^{2-N}$ (ou $\log$), localement intégrable car $2-N > -N$ (exemple 1.9). **(2) Harmonicité hors de l'origine :** pour une fonction radiale $u(x) = v(r)$, $\Delta u = v'' + \frac{N-1}{r}v'$; avec $v = r^{2-N}$ (resp. $\log r$) : $v'' + \frac{N-1}{r}v' = (2-N)(1-N)r^{-N} + (N-1)(2-N)r^{-N} = 0$. **(3) La masse au centre :** pour $\varphi \in C_c^\infty$,

$$\langle \Delta E_N, \varphi \rangle = \int E_N \Delta \varphi \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} E_N \Delta \varphi \, dx$$

(convergence dominée, $E_N \in L^1_{\text{loc}}$). Sur le domaine $\{|x| > \varepsilon\}$, la formule de Green (cor. 1.12, la normale extérieure au domaine pointe vers l'origine) :

$$\int_{|x| > \varepsilon} (E_N \Delta \varphi - \underbrace{\Delta E_N \varphi}_{=0}) = \int_{|x| = \varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial E_N}{\partial r} - E_N \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) d\sigma.$$

(4) Second terme du bord : $|E_N(\varepsilon)| \cdot |S^{N-1}| \varepsilon^{N-1} \cdot \sup |\nabla \varphi| = \mathcal{O}(\varepsilon |E_N(\varepsilon)| \varepsilon^{N-2}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ ou $\mathcal{O}(\varepsilon \log \varepsilon) \rightarrow 0$. **(5) Premier terme :** $\frac{\partial E_N}{\partial r} = \frac{1}{|S^{N-1}|} r^{1-N}$ (dans les deux cas !), donc

$$\int_{|x| = \varepsilon} \varphi \frac{\partial E_N}{\partial r} \, d\sigma = \frac{1}{|S^{N-1}| \varepsilon^{N-1}} \int_{|x| = \varepsilon} \varphi \, d\sigma = \text{moyenne de } \varphi \text{ sur la sphère} \rightarrow \varphi(0).$$

D'où $\langle \Delta E_N, \varphi \rangle = \varphi(0)$. □

Intuition

$E_3 = -\frac{1}{4\pi|x|}$ est (au signe près) le potentiel coulombien d'une charge unité : le théorème dit exactement que le champ d'une charge ponctuelle a pour source δ_0 — la loi de Gauss de l'électrostatique, écrite proprement. La normalisation $\frac{1}{|S^{N-1}|}$ vient du flux : tout le flux du champ ∇E_N traverse chaque sphère, quelle que soit sa taille.

Corollaire 7.2 (Potentiel newtonien). *Pour $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ (ou $f \in C_c^\infty$), la fonction $u = E_N * f$ résout l'équation de Poisson $\Delta u = f$. En dimension 3 :*

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy.$$

C'est le théorème 4.10 appliqué mot pour mot.

7.2 Propriété de la moyenne et principe du maximum

Théorème 7.3 (Propriété de la moyenne). *Si u est harmonique sur Ω alors, pour toute boule $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$,*

$$u(x) = \frac{1}{|S^{N-1}|r^{N-1}} \int_{|y-x|=r} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy.$$

Démonstration. Posons $M(r)$ = moyenne sphérique de u sur $\partial B(x, r)$. En passant en coordonnées sphériques centrées en x puis en dérivant sous l'intégrale (paramétrer la sphère unité) :

$$M'(r) = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \omega \cdot \nabla u(x + r\omega) d\sigma(\omega) = \frac{1}{|S^{N-1}|r^{N-1}} \int_{B(x, r)} \Delta u dy = 0,$$

la deuxième égalité étant le théorème de la divergence. Donc $M(r)$ est constante = $\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = u(x)$ par continuité. La moyenne volumique s'en déduit en intégrant en r . □

Corollaire 7.4 (Principe du maximum fort). *Une fonction harmonique sur un ouvert connexe Ω qui atteint son maximum en un point intérieur est constante. En conséquence, sur Ω borné, $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$: les extrêmes vivent au bord.*

Démonstration. Si $u(x_0) = M = \sup_{\Omega} u$, la propriété de la moyenne volumique force $u \equiv M$ sur toute boule centrée en x_0 (une moyenne de valeurs $\leq M$ égale à M impose l'égalité p.p., puis partout par continuité) : l'ensemble $\{u = M\}$ est ouvert ; il est fermé par continuité ; par connexité c'est Ω . □

Corollaire 7.5 (Unicité du problème de Dirichlet). *Si $\Delta u_1 = \Delta u_2 = f$ dans Ω borné et $u_1 = u_2$ sur $\partial\Omega$, alors $u_1 = u_2$: appliquer le principe du maximum (et du minimum) à $u_1 - u_2$, harmonique et nulle au bord.*

Application physique

Interprétation probabiliste (marche aléatoire) : u harmonique $\iff u(x) = \mathbb{E}[u(x + \text{pas aléatoire isotrope})]$: la valeur au centre est la moyenne des valeurs voisines — c'est un jeu *équitable*. Le principe du maximum dit qu'un jeu équitable n'a pas de stratégie miracle intérieure ; la solution du problème de Dirichlet est $u(x) = \mathbb{E}_x[g(B_{\tau_{\partial\Omega}})]$ — la moyenne de la donnée au bord au point de première sortie du mouvement brownien. Le TD 7 vérifie cette représentation par simulation Monte-Carlo, contre la solution numérique

```
optimizr.poisson_2d_zero_boundary.
```

Théorème 7.6 (Régularité : harmonique $\Rightarrow$ analytique). *Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\Delta T = 0$ est (la distribution d'une) fonction C^∞ — et même analytique réelle. Plus généralement, Δ est hypoelliptique : $\text{singsupp}(T) = \text{singsupp}(\Delta T)$.*

Schéma de preuve. Régularisons : $T * \rho_\varepsilon$ est C^∞ et harmonique, donc vérifie la propriété de la moyenne ; en la moyennant contre la bosse radiale, $T * \rho_\varepsilon = T * \rho_{\varepsilon'}$ pour tous $\varepsilon, \varepsilon'$ sur un ouvert légèrement rétréci (la moyenne sphérique ne dépend pas du rayon). Donc $T = \lim T * \rho_\varepsilon = T * \rho_{\varepsilon_0}$ y est C^∞ . L'analyticité vient des bornes de Cauchy sur les dérivées obtenues en itérant la représentation en moyenne (Evans §2.2). L'hypoellipticité générale se lit sur la solution élémentaire : E_N est C^∞ hors de l'origine, et $T = E_N * (\Delta T)$ modulo lisse. $\square$

7.3 Fonction de Green du domaine et noyau de Poisson

Définition 7.7. La fonction de Green de Ω (Dirichlet) est $G_\Omega(x, y) = E_N(x - y) - h_y(x)$, où h_y est harmonique en x avec $h_y = E_N(\cdot - y)$ sur $\partial\Omega$: la correction qui annule G au bord.

Exemple 7.8 (Boule et méthode des images). Pour la boule $B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$, la charge image d'une charge unité en y est une charge $-R/|y|$ placée au point inversé $y^* = \frac{R^2}{|y|^2}y$:

$$G_B(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{R/|y|}{|x - y^*|} \right).$$

Vérification que $G_B = 0$ sur $|x| = R$: pour $|x| = R$, $|x - y^*| = \frac{R}{|y|}|x - y|$ (calcul direct : élever au carré et utiliser $|y||y^*| = R^2$). La dérivée normale de G_B au bord donne le *noyau de Poisson*

$$P(x, \omega) = \frac{R^2 - |x|^2}{|S^{N-1}|R|x - R\omega|^N}, \quad u(x) = \int_{S^{N-1}} P(x, \omega) g(R\omega) R^{N-1} d\sigma(\omega)$$

qui résout le problème de Dirichlet $\Delta u = 0$, $u|_{\partial B} = g$: une moyenne pondérée *explicite* de la donnée au bord — le prototype de toutes les formules de représentation.

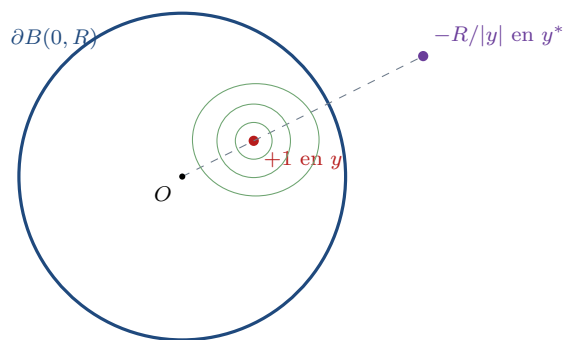


FIGURE 7.1 – Méthode des images pour la boule : la charge fictive au point inversé $y^* = R^2y/|y|^2$ annule exactement le potentiel sur la sphère. La fonction de Green du domaine encode la géométrie du bord.

Application finance / signal

Le potentiel de Yukawa $\frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|}$ — solution élémentaire de $-\Delta + m^2$ (exercice 5.2) — est aussi la fonction de covariance du *champ libre massif*, l'objet de base de la partie C : la

portée $1/m$ deviendra la *longueur de corrélation* ξ du chapitre 10. La divergence de ξ quand $m \rightarrow 0$ est la criticité.

Au notebook compagnon

TD 7 du notebook — équation de Poisson 2D résolue par `optimizr.poisson_2d_zero_boundary` (charge ponctuelle $\rightarrow$ Green discret, dipôle, quadrupôle); propriété de la moyenne vérifiée par marches aléatoires (Monte-Carlo); animation du potentiel lors du déplacement d'une charge dans une boîte (méthode des images).

7.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 7.9 (Le développement multipolaire : comment une molécule voit une autre de loin). Pour une source localisée ρ (support dans $|y| < a$), le potentiel à grande distance se développe en injectant $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{r^3} + \frac{3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y})^2 - y^2}{2r^3} \cdot \frac{1}{r} + \mathcal{O}(a^3/r^4)$ dans le potentiel newtonien (cor. 7.2) :

$$4\pi\epsilon_0 \Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{r^2} + \frac{Q_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j}{2r^3} + \dots, \quad Q = \int \rho, \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{y}\rho, \quad Q_{ij} = \int (3y_i y_j - y^2 \delta_{ij})\rho.$$

C'est le développement dual de celui de l'exemple 3.19 (la source vue comme somme de dérivées de δ) : terme à terme, $E_3 * \partial^\alpha \delta = \partial^\alpha E_3$. **Hiérarchie physico-chimique complète** : l'énergie d'interaction entre deux molécules décroît comme charge-charge $1/r$, charge-dipôle $1/r^2$, dipôle-dipôle $1/r^3$ (interaction de Keesom entre molécules d'eau, $\mathbf{p}_{\text{H}_2\text{O}} = 1,85 \text{ D}$: c'est elle qui structure l'eau liquide), dipôle-dipôle *induit* $1/r^6$ (van der Waals-London, qui fait tenir les geckos au plafond). La symétrie élague (chap. 17, principe de Curie) : CO_2 linéaire centrosymétrique a $\mathbf{p} = 0$ mais $Q_{zz} \neq 0$; CH_4 tétraédrique a $\mathbf{p} = 0$ et $Q = 0$ (premier moment non nul : octupôle) — d'où son point d'ébullition si bas (-161°C) : la table des groupes ponctuels se lit directement dans les températures d'ébullition.

Exemple 7.10 (Yukawa, écrantage de Debye et potentiel de Cornell : quand le laplacien prend une masse). Remplaçons $-\Delta$ par $-\Delta + \kappa^2$: la solution élémentaire devient (calcul par Fourier, chap. 5 : $\hat{E} = -1/(k^2 + \kappa^2)$, intégrale par résidus)

$$E_\kappa(x) = -\frac{e^{-\kappa|x|}}{4\pi|x|} :$$

le potentiel de Yukawa, de portée $1/\kappa$. **(a) Plasma / électrolyte** : autour d'une charge test, les porteurs mobiles se réarrangent ; la linéarisation de Poisson-Boltzmann donne exactement $(-\Delta + \kappa_D^2)\Phi = \rho/\epsilon$ avec $\kappa_D^2 = \sum_i n_i q_i^2 / \epsilon k_B T$: la longueur de Debye (0,7 nm dans l'eau de mer, 10 m dans le vent solaire) est la portée effective de l'électrostatique dans un milieu conducteur. **(b) Interaction nucléaire** : Yukawa (1935) postule que la portée $\sim 1,4 \text{ fm}$ de la force forte résulte de l'échange d'une particule de masse $\kappa\hbar/c \approx 140 \text{ MeV}$ — le pion, découvert en 1947 : la portée d'une force mesure la masse de son médiateur. La portée infinie de Coulomb $\Leftrightarrow$ photon sans masse (testé à $m_\gamma < 10^{-54} \text{ kg}$ par la survie des champs magnétiques galactiques). **(c) QCD et confinement** : entre un quark et un antiquark lourds, le potentiel mesuré (sur réseau, et via les spectres du charmonium) est celui de Cornell : $V(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s \hbar c}{r} + \sigma r$, avec $\sigma \approx 0,9 \text{ GeV/fm}$. Le premier terme est coulombien (échange de gluon, facteur 4/3 de couleur) ; le second, *linéaire*, n'est la fonction de Green d'aucun opérateur local en 3D : le flux chromoélectrique se concentre en un tube (corde) au lieu de s'étaler — séparer la paire coûte une énergie $\propto r$, il est énergétiquement préférable de créer une nouvelle paire $q\bar{q}$: aucun quark isolé n'est observable. La transition Coulomb $\rightarrow$ corde est le problème du confinement, non résolu analytiquement (problème du millénaire Yang-Mills).

7.5 Exercices corrigés

Exercice 7.1 (★) — Le potentiel d'une sphère chargée

Calculer $u = E_3 * \sigma_R$ où σ_R est la mesure uniforme de masse totale 1 sur la sphère $|x| = R$. Retrouver le théorème de Newton.

Solution détaillée

(1) Par symétrie, u est radiale; hors de la sphère elle est harmonique et tend vers 0 : $u = -\frac{c_{\pm}}{4\pi r}$ pour $r > R$, $u = c_0$ constante pour $r < R$ (seule harmonique radiale bornée en 0). (2) Le flux à travers une grande sphère (Gauss, $\Delta u = \sigma_R$ de masse 1) fixe $c_+ = 1$; la continuité en $r = R$ (le potentiel d'une couche simple est continu) donne $c_0 = -\frac{1}{4\pi R}$. (3) Théorème de Newton : à l'extérieur, tout se passe comme si la masse était au centre; à l'intérieur, le champ est nul (potentiel constant). ✓

Exercice 7.2 (★★) — Harnack et Liouville

Déduire du noyau de Poisson l'inégalité de Harnack : pour $u \geq 0$ harmonique sur $B(0, R)$,

$$\frac{R^{N-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{N-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{N-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{N-1}} u(0).$$

En déduire le théorème de Liouville : toute fonction harmonique bornée (ou seulement positive) sur $\mathbb{R}^N$ entier est constante.

Solution détaillée

(1) Encadrer le noyau de Poisson : $R - |x| \leq |x - R\omega| \leq R + |x|$, d'où $\frac{R^2 - |x|^2}{(R + |x|)^N} \leq P(x, \omega) |S^{N-1}| R \leq \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^N}$; intégrer contre $u \geq 0$ au bord et utiliser la moyenne $u(0)$. (2) Liouville : fixer x et faire $R \rightarrow \infty$ dans Harnack : les deux bornes tendent vers $u(0)$, donc $u(x) = u(0)$. Pour u bornée, appliquer à $u - \inf u \geq 0$. Conséquence physique : pas de champ électrostatique non trivial sans charge dans tout l'espace avec potentiel borné. ✓

Exercice 7.3 (★★★) — Développement multipolaire

Pour $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ de support dans $B(0, a)$, montrer que le potentiel $u = E_3 * f$ admet pour $|x| > a$ le développement

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{Q}{|x|} + \frac{p \cdot x}{|x|^3} + \mathcal{O}(|x|^{-3}) \right], \quad Q = \langle f, 1 \rangle, \quad p = \langle f, y \rangle,$$

et relier au théorème 3.18.

Solution détaillée

(1) Taylor du noyau en y autour de 0, pour $|x| > a \geq |y|$: $\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|} + \frac{x \cdot y}{|x|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{|y|^2}{|x|^3}\right)$, développement uniforme sur le support compact. (2) Appliquer f (prolongée à C^∞ , prop. 4.2(ii)) terme à terme : les coefficients sont les *moments* $Q = \langle f, 1 \rangle$ (charge totale), $p_i = \langle f, y_i \rangle$ (moment dipolaire), etc. (3) Lien avec le théorème 3.18 : vu de l'infini, f est indistinguable de $Q\delta_0 - p \cdot \nabla \delta_0 + \dots$ — la hiérarchie charge/dipôle/quadrupôle est

exactement la base $\{\partial^\alpha \delta_0\}$ des distributions ponctuelles : le développement multipolaire est le développement de Taylor *dual*. ✓

Chapitre 8

L'équation de la chaleur et le mouvement brownien

L'équation de la chaleur est le pont entre la partie B et la partie C : son noyau gaussien est à la fois la solution élémentaire d'une EDP, la densité de transition du mouvement brownien, et — après rotation de Wick $t \rightarrow -it$ — le propagateur de la mécanique quantique. La maîtriser, c'est déjà faire de l'intégrale de chemin sans le savoir.

Prérequis / rappel

Transformation de Fourier (chapitre 5), en particulier la gaussienne (5.5) et le produit de convolution (5.3) ; solutions élémentaires (définition 4.9).

8.1 Le noyau de la chaleur

Théorème 8.1 (Résolution du problème de Cauchy). *Le problème $\partial_t u = \kappa \Delta u$ sur $(0, \infty) \times \mathbb{R}^N$, $u(0, \cdot) = u_0 \in L^2$ (ou $\mathcal{S}'$ tempérée), admet pour solution*

$$u(t, \cdot) = K_t * u_0, \quad K_t(x) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}}. \quad (8.1)$$

De plus $E(t, x) = H(t)K_t(x)$ est la solution élémentaire causale : $(\partial_t - \kappa\Delta)E = \delta_{(0,0)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+N})$.

Démonstration. (1) Fourier en x : $\partial_t \hat{u} = -\kappa|\xi|^2 \hat{u}$, EDO résolue par $\hat{u}(t, \xi) = e^{-\kappa t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$. (2) $e^{-\kappa t|\xi|^2}$ est la transformée de K_t par (5.5) (avec $a = \frac{1}{4\kappa t}$) ; le produit devient convolution par (5.3) : c'est (8.1). (3) Solution élémentaire : pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+N})$,

$$\langle (\partial_t - \kappa\Delta)E, \varphi \rangle = - \int_0^\infty \int K_t(\partial_t \varphi + \kappa\Delta \varphi) dx dt$$

(transfert des dérivées ; le signe de Δ ne change pas, deux IPP). On intègre sur $t > \varepsilon$ puis $\varepsilon \rightarrow 0$: le terme intérieur s'annule car K_t résout l'équation ; le terme de bord en $t = \varepsilon$ vaut $\int K_\varepsilon \varphi(\varepsilon, x) dx \rightarrow \varphi(0, 0)$ car K_ε est une approximation gaussienne de l'unité (prop. 3.8). $\square$

Intuition

Trois lectures du noyau (8.1) : (i) EDP : une source ponctuelle de chaleur s'étale en gaussienne de largeur $\sqrt{2\kappa t}$ — l'étalement en $\sqrt{t}$ est la signature diffusive (contre t pour le transport). (ii) Probabilités : $K_t(x - y)$ est la densité de probabilité qu'un brownien parti de y soit en x à l'instant t : l'équation de la chaleur est l'équation d'évolution de la loi

du brownien (Fokker–Planck sans dérive). (iii) *Semi-groupe* : $K_t * K_s = K_{t+s}$ (les gaussiennes se convolent en additionnant les variances) : propriété de Chapman–Kolmogorov, qui deviendra la *composition des propagateurs* — le cœur de la construction de l'intégrale de chemin au chapitre 13.

Proposition 8.2 (Propriétés qualitatives). (i) Régularisation instantanée : pour $t > 0$, $u(t, \cdot) \in C^\infty$ même si u_0 est seulement L^2 (ou une mesure). (ii) Vitesse infinie : si $u_0 \geq 0$ non nulle à support compact, alors $u(t, x) > 0$ pour tout x dès que $t > 0$. (iii) Décroissance : $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq (4\pi\kappa t)^{-N/2} \|u_0\|_{L^1}$ et $\|u(t)\|_{L^2}$ décroît. (iv) Irréversibilité : le problème rétrograde ($t < 0$) est mal posé — une donnée L^2 générique n'a aucune solution en amont.

Démonstration. (i) : convolution avec le facteur lisse gaussien (prop. 2.5(iv)) ; en Fourier, $e^{-\kappa t|\xi|^2} \widehat{u}_0$ décroît plus vite que tout polynôme. (ii) : le noyau est strictement positif partout. (iii) : Young (2.5)(ii) et $\|K_t\|_{L^1} = 1$, $\|K_t\|_{L^\infty} = (4\pi\kappa t)^{-N/2}$; en L^2 , $|\widehat{u}| = e^{-\kappa t|\xi|^2} |\widehat{u}_0| \leq |\widehat{u}_0|$ et Plancherel. (iv) : résoudre en arrière exigerait multiplier $\widehat{u}_0$ par $e^{+\kappa t|\xi|^2}$, qui n'est tempéré pour aucune donnée non triviale à spectre plein — l'irréversibilité thermodynamique est ici un fait d'analyse harmonique. $\square$

Attention — piège classique

La « vitesse infinie de propagation » (ii) viole la relativité : la chaleur est une équation *effective*, valable aux échelles où le libre parcours moyen est négligeable. Les queues gaussiennes $e^{-x^2/4\kappa t}$ sont toutefois si minces que la causalité pratique est restaurée à toute échelle macroscopique.

8.2 Du marcheur aléatoire à la diffusion

Proposition 8.3 (Limite diffusive de la marche aléatoire). Soit un marcheur sur $a\mathbb{Z}$ sautant de $\pm a$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ tous les τ . Notons $P_n(k)$ la loi au temps $n\tau$. Si $a, \tau \rightarrow 0$ avec $\kappa = \frac{a^2}{2\tau}$ fixé, alors la densité interpolée converge vers la solution de $\partial_t P = \kappa \partial_x^2 P$.

Démonstration. La récurrence $P_{n+1}(k) = \frac{1}{2}P_n(k-1) + \frac{1}{2}P_n(k+1)$ se réécrit

$$\frac{P_{n+1}(k) - P_n(k)}{\tau} = \frac{a^2}{2\tau} \frac{P_n(k+1) - 2P_n(k) + P_n(k-1)}{a^2}.$$

Le membre de droite est κ fois le laplacien discret ; le développement de Taylor à l'ordre 2 (pour un profil régulier) donne $\partial_t P = \kappa \partial_x^2 P + \mathcal{O}(a^2)$. La convergence rigoureuse est le théorème central limite (chaque position est une somme de n pas i.i.d.), ou le théorème de Donsker au niveau des trajectoires. $\square$

Application physique — Einstein 1905

La relation $\kappa = \frac{a^2}{2\tau}$ relie le coefficient de diffusion macroscopique aux paramètres microscopiques du choc moléculaire : mesurer κ (grain de pollen de Brown) et la viscosité donne le nombre d'Avogadro — l'argument d'Einstein qui a convaincu de l'existence des atomes. La relation moderne $\kappa = \mu k_B T$ (Einstein–Smoluchowski, mobilité $\times$ température) est le premier exemple du *théorème fluctuation–dissipation* que l'on démontrera en toute généralité au chapitre 15.

8.3 Fokker–Planck : diffusion avec dérive

Définition 8.4 (Équation de Fokker–Planck / Smoluchowski). Pour une particule suramortie dans un potentiel V à température T (bruit $\sqrt{2\kappa}$, $\kappa = k_B T / \gamma$) :

$$\partial_t P = \partial_x \left(\frac{V'(x)}{\gamma} P \right) + \kappa \partial_x^2 P = \partial_x \left[\kappa e^{-V/k_B T} \partial_x (e^{V/k_B T} P) \right]. \quad (8.2)$$

Proposition 8.5. La densité stationnaire de (8.2) (si normalisable) est la mesure de Gibbs

$$P_\infty(x) = \frac{1}{Z} e^{-V(x)/k_B T}, \quad Z = \int e^{-V/k_B T} dx,$$

et toute donnée initiale y converge (potentiel confinant).

Démonstration. La forme « divergence » de (8.2) montre que $P_\infty \propto e^{-V/k_B T}$ annule le courant $J = -\kappa e^{-V/k_B T} \partial_x (e^{V/k_B T} P)$: stationnaire. Convergence : la fonctionnelle d'entropie relative $D(P \| P_\infty) = \int P \log \frac{P}{P_\infty}$ décroît ($\frac{dD}{dt} = -\int \frac{J^2}{\kappa P} \leq 0$, calcul direct) et ne s'annule qu'en $P = P_\infty$: c'est un théorème H. La vitesse est gouvernée par le *trou spectral* de l'opérateur de Fokker–Planck, relié au temps de Kramers $e^{\Delta V/k_B T}$ pour un double puits. $\square$

Idée-clé

(8.2) est la passerelle dynamique vers la partie C : la mesure de Gibbs $e^{-V/k_B T}/Z$ — objet central de la physique statistique (chapitre 10) — est le point fixe d'une diffusion. Échantillonner Gibbs en simulant la diffusion, c'est l'algorithme de *Langevin Monte-Carlo* ; le faire par chaîne de Markov discrète, c'est *Metropolis* (TD 8, `optimizr.mcmc_sample`). La théorie des champs euclidienne utilisera exactement la même structure avec $V \rightarrow S[\phi]$ (action fonctionnelle).

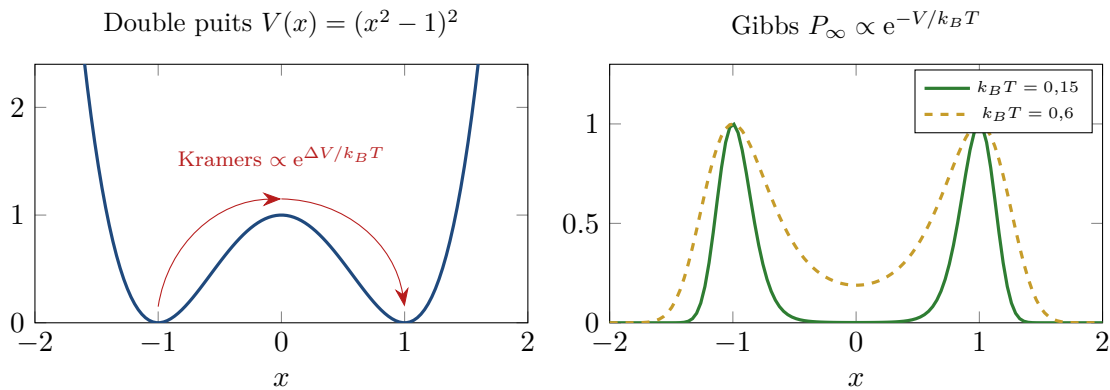


FIGURE 8.1 – Diffusion dans un double puits : à basse température, la mesure de Gibbs se concentre dans les deux vallées et le passage thermique suit la loi d'Arrhenius–Kramers. Ce paysage réapparaîtra à l'identique pour l'instanton quantique (chapitre 13).

Application finance / signal

Le modèle de Black–Scholes est une équation de la chaleur : le changement de variables $S = e^x$, $\tau = T - t$ transforme l'EDP de pricing en $\partial_\tau u = \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 u + \dots$, et la formule fermée n'est autre que la convolution (8.1) contre le payoff. Les diffusions à dérive (8.2) modélisent les taux courts (Vasicek = Ornstein–Uhlenbeck), et le temps de Kramers gouverne les transitions de régime. TD 8 : `optimizr.fokker_planck_constant` contre solution exacte

OU, et échantillonnage de Gibbs par `mcmc_sample`.

Au notebook compagnon

TD 8 du notebook — animation du noyau de la chaleur (étalement $\sqrt{t}$, régularisation d'un créneau) ; marche aléatoire $\rightarrow$ diffusion (Donsker visuel) ; Fokker–Planck double puits (`optimizr.fokker_planck_constant`) : relaxation vers Gibbs *animée* et temps de Kramers vs $1/T$; Metropolis (`optimizr.mcmc_sample`) sur le même potentiel.

8.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 8.6 (La conduction thermique dans un cristal : le tenseur que la symétrie autorise). Dans un cristal anisotrope, la loi de Fourier devient $\mathbf{q} = -\lambda_{ij}\partial_j T$ et l'équation de la chaleur $\partial_t T = D_{ij}\partial_i\partial_j T$. Le principe de Curie (chap. 17, exemple 17.4) contraint D_{ij} : pour le graphite (hexagonal), $D_{\parallel}$ et $D_{\perp}$ seulement, avec un contraste géant $\lambda_{\text{plan}} \approx 2000$ W/m/K (meilleur que le cuivre, 401 W/m/K) contre $\lambda_{\perp} \approx 6$ W/m/K : les feuillets conduisent, l'empilement isole. **Résolution explicite** : le changement de variables linéaire $x'_i = x_i/\sqrt{D_i}$ (axes propres, chap. 1) ramène au laplacien isotrope : le noyau est une gaussienne *anisotrope*

$$K_t(\mathbf{x}) = \frac{\exp(-\frac{1}{4}t^{-1}\sum_i x_i^2/D_i)}{(4\pi t)^{3/2}\sqrt{D_1 D_2 D_3}} :$$

une impulsion laser ponctuelle sur du graphite s'étale en ellipse de demi-axes $\sqrt{2D_i t}$ (rapport $\sqrt{2000/6} \approx 18$) : c'est la méthode « laser flash » qui cartographie D_{ij} , et le principe des films de graphite qui étalent la chaleur des smartphones *latéralement* sans cuire la batterie en dessous.

Exemple 8.7 (Le temps propre de Schwinger : la chaleur au cœur des boucles de Feynman). L'identité élémentaire $\frac{1}{A} = \int_0^\infty e^{-sA} ds$ ($A > 0$), appliquée au propagateur euclidien $A = k^2 + m^2$, s'écrit

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty ds e^{-s(k^2 + m^2)} :$$

le propagateur est la transformée de Laplace du *noyau de la chaleur* e^{-sk^2} — le paramètre s (« temps propre de Schwinger ») diffuse la particule le long de sa ligne d'univers. **Pourquoi c'est puissant** : dans une boucle de Feynman (chap. 12), l'intégrale sur k devient *gaussienne* à s fixé — on intègre exactement grâce au chapitre 1 — et toute la difficulté se concentre dans l'intégrale sur s : la divergence ultraviolette ($k \rightarrow \infty$) devient une divergence en $s \rightarrow 0$ (temps de diffusion courts, petites distances), régularisée proprement en coupant $s > 1/\Lambda^2$ ou par continuation dimensionnelle ($d^4 k \rightarrow d^d k$: le noyau de la chaleur en dimension d donne $(4\pi s)^{-d/2}$, fonction *analytique* de d). **Application : l'effet Euler–Heisenberg** : l'énergie du vide de QED dans un champ magnétique constant se calcule par le noyau de la chaleur de l'opérateur de Dirac dans ce champ (spectre de Landau, calculable exactement) : $\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{2\alpha^2}{45m^4} [(E^2 - B^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] + \dots$ — les invariants de Lorentz du chapitre 18 apparaissent seuls, comme la symétrie l'exige : la lumière diffuse sur la lumière (mesuré par ATLAS dans les collisions Pb–Pb, 2017). La « simple » équation de la chaleur de ce chapitre est ainsi l'outil de calcul standard des actions effectives en théorie des champs.

8.5 Exercices corrigés

Exercice 8.1 (★) — Semi-groupe et moments

Vérifier $K_t * K_s = K_{t+s}$ par Fourier, puis calculer $\int x^2 K_t(x) dx$ en dimension 1 et retrouver $\langle x^2 \rangle = 2\kappa t$.

Solution détaillée

(1) $\widehat{K}_t = e^{-\kappa t |\xi|^2}$: $\widehat{K}_t \widehat{K}_s = e^{-\kappa(t+s)|\xi|^2} = \widehat{K}_{t+s}$; l'injectivité de $\mathcal{F}$ conclut. (2) Gaussienne de variance $\sigma^2 = 2\kappa t$ (comparer (8.1) à la densité normale) : le déplacement quadratique moyen croît *linéairement* en temps — diffusion normale. Toute anomalie ($\langle x^2 \rangle \sim t^{2H}$, $H \neq \frac{1}{2}$) signale mémoire ou milieux désordonnés : cf. fBm au TD 5. ✓

Exercice 8.2 (★★) — Solution d'Ornstein–Uhlenbeck

Résoudre $\partial_t P = \partial_x(\theta x P) + \kappa \partial_x^2 P$ (potentiel quadratique $V = \frac{\gamma}{2} x^2$) avec $P(0, \cdot) = \delta_{x_0}$, par l'ansatz gaussien.

Solution détaillée

(1) Ansatz $P = \mathcal{N}(m(t), v(t))$: injecter et identifier donne $\dot{m} = -\theta m$, $\dot{v} = -2\theta v + 2\kappa$. (2) $m(t) = x_0 e^{-\theta t}$, $v(t) = \frac{\kappa}{\theta}(1 - e^{-2\theta t})$. (3) $t \rightarrow \infty$: $\mathcal{N}(0, \kappa/\theta)$ — la Gibbs du potentiel quadratique, conformément à la prop. 8.5 ; le taux de relaxation est θ (trou spectral exact). C'est le processus de retour-à-la-moyenne de la finance (Vasicek, paires), et le propagateur euclidien de l'oscillateur harmonique du chapitre 13 aura exactement cette forme. ✓

Exercice 8.3 (★★★) — Formule de Duhamel et chaleur forcée

Résoudre $\partial_t u - \kappa \Delta u = f(t, x)$, $u(0) = 0$, et montrer l'estimation de régularité maximale $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \int_0^t (4\pi\kappa(t-s))^{-N/2} \|f(s)\|_{L^1} ds$; en déduire que pour $N \leq 1$... les sources intégrables en temps donnent u borné si $N = 1$ et $f \in L_t^\infty L_x^1$? Discuter selon N .

Solution détaillée

(1) Duhamel (superposition des réponses aux impulsions à chaque instant s) : $u(t) = \int_0^t K_{t-s} * f(s) ds$; vérification par dérivation sous l'intégrale + limite $K_{t-s} \rightarrow \delta$ quand $s \rightarrow t$. (2) Young $L^1 * L^1 \rightarrow L^1$... ici $\|K_{t-s} * f(s)\|_{L^\infty} \leq \|K_{t-s}\|_{L^\infty} \|f(s)\|_{L^1}$ donne l'estimation annoncée. (3) L'intégrale $\int_0^t (t-s)^{-N/2} ds$ converge ssi $N < 2$: en dimension 1 la réponse reste bornée ; dès $N \geq 2$, une source entretenue peut faire diverger la température au point source (logarithmiquement en $N = 2$) — le même comptage de puissances qui rend les théories de champs *super-renormalisables* en $d < 2$... l'analogie dimensionnelle deviendra précise au chapitre 12. ✓

Chapitre 9

Ondes et Schrödinger : propagation et dispersion

Dernier chapitre de la partie B : les deux équations d'évolution *réversibles*. L'équation des ondes propage à vitesse finie avec le principe de Huygens ; l'équation de Schrödinger disperse. Leur comparaison avec la chaleur (chapitre 8) éclaire d'un coup toute la classification des EDP — et la rotation de Wick qui les relie est le passage euclidien $\leftrightarrow$ temps réel de la partie C.

Prérequis / rappel

Chapitres 5 et 8. On notera $\square = \partial_t^2 - c^2 \Delta$ (d'Alembertien).

9.1 Corde vibrante : d'Alembert

Théorème 9.1 (Formule de d'Alembert, $N = 1$). *La solution de $\square u = 0$, $u(0) = u_0 \in C^2$, $\partial_t u(0) = u_1 \in C^1$ est*

$$u(t, x) = \frac{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy. \quad (9.1)$$

Démonstration. **(1)** Factorisation $\square = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$: en posant $v = (\partial_t + c\partial_x)u$, on a deux équations de transport en cascade (chapitre 6). **(2)** Les variables du cône $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ donnent $\partial_\xi \partial_\eta u = 0$, d'où $u = F(\xi) + G(\eta)$: superposition d'une onde droite et d'une onde gauche. **(3)** Les données initiales fixent $F + G = u_0$ et $c(G' - F') = u_1$: résoudre ce système linéaire donne (9.1). L'unicité vient de la factorisation en transports, chacun à solution unique (théorème 6.1). $\square$

Intuition

Deux différences fondamentales avec la chaleur : *(i) vitesse finie* : $u(t, x)$ ne dépend que des données dans l'intervalle $[x - ct, x + ct]$ — le *domaine de dépendance* ; aucune information ne dépasse la vitesse c ; *(ii) aucune régularisation* : un pli dans u_0 se propage indéfiniment le long des caractéristiques (les singularités voyagent sur le cône de lumière) : l'équation est réversible, l'entropie ne croît pas.

9.2 Dimension 3 : moyennes sphériques et Huygens

Théorème 9.2 (Formule de Kirchhoff, $N = 3$). *En dimension 3, la solution de $\square u = 0$, $u(0) = u_0$, $\partial_t u(0) = u_1$ (assez régulières) est*

$$u(t, x) = \partial_t \left[t \overline{u_0}(x, ct) \right] + t \overline{u_1}(x, ct), \quad \overline{f}(x, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} f(y) d\sigma(y). \quad (9.2)$$

La solution élémentaire causale de $\square$ est la couche sphérique

$$E_+(t, x) = \frac{H(t)}{4\pi c^2 t} \delta(|x| - ct) \quad (\text{mesure uniforme sur la sphère } |x| = ct).$$

Schéma de preuve. (1) *Équation d'Euler–Poisson–Darboux* : la moyenne sphérique $\overline{u}(x, r, t)$ d'une solution vérifie $\partial_t^2(r\overline{u}) = c^2 \partial_r^2(r\overline{u})$ — une équation des ondes *unidimensionnelle* en la variable r ! (Calcul : dériver la moyenne comme au théorème 7.3, le laplacien radial $\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r$ devient ∂_r^2 après multiplication par r .) (2) On résout par d'Alembert (9.1) sur la demi-droite $r > 0$ avec la condition $r\overline{u}|_{r=0} = 0$ (réflexion impaire), puis on extrait $u(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \overline{u}(x, r, t)$: le calcul des termes donne (9.2). (3) La solution élémentaire s'obtient en appliquant (9.2) à $u_0 = 0$, $u_1 = \delta$ (au sens distributionnel, en régularisant) : la moyenne sphérique de δ est la couche uniforme. (Détails : Golse ch. 11.3.) $\square$

Idée-clé — Principe de Huygens fort

En dimension 3 (et toute dimension *impaire* ≥ 3), la solution élémentaire est portée par le cône *exactement* ($|x| = ct$) : un flash ponctuel produit une onde qui passe puis *s'éteint complètement* — le signal est net. En dimension 2 (descente de Hadamard : intégrer (9.2) sur une droite), le support est le cône *plein* $|x| \leq ct$: une pierre dans l'étang laisse des ondulations persistantes. En dimension 1 aussi (l'intégrale de (9.1) traîne). Nous entendons proprement parce que l'espace a trois dimensions.

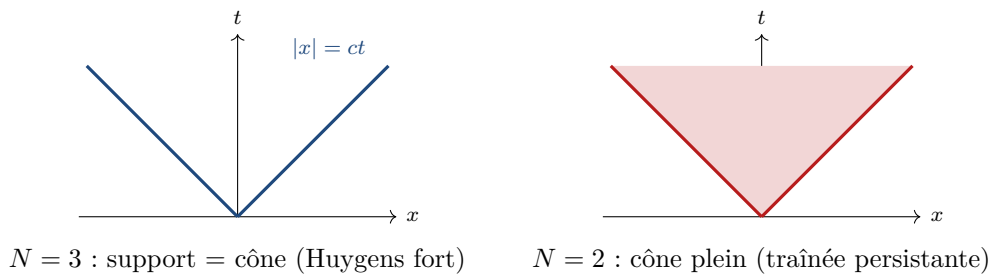


FIGURE 9.1 – Support de la solution élémentaire des ondes : net en dimension impaire ≥ 3 , traînant en dimension paire.

Proposition 9.3 (Conservation de l'énergie). *Pour u solution régulière décroissante à l'infini,*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\partial_t u|^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx = \text{constante}.$$

Démonstration. $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int (\partial_t u \partial_t^2 u + c^2 \nabla u \cdot \nabla \partial_t u) = \int \partial_t u (\partial_t^2 u - c^2 \Delta u) = 0$, après IPP (1.3) sur le second terme. $\square$

9.3 Schrödinger libre : dispersion

Théorème 9.4 (Propagateur libre de Schrödinger). *Le problème $i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$, $\psi(0) = \psi_0 \in \mathcal{S}$, est résolu par $\psi(t) = U_t * \psi_0$ avec*

$$U_t(x) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{N/2} \exp\left(\frac{im|x|^2}{2\hbar t} \right), \quad (9.3)$$

et l'évolution conserve la norme L^2 (unitarité) tout en dispersant : $\|\psi(t)\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{m}{2\pi \hbar |t|} \right)^{N/2} \|\psi_0\|_{L^1}$.

Démonstration. (1) Fourier : $\widehat{\psi}(t, \xi) = e^{-i\hbar t |\xi|^2 / 2m} \widehat{\psi}_0(\xi)$ — module 1, donc $\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2}$ par Plancherel (unitarité). (2) (9.3) est la gaussienne (5.5) prolongée à $a = \frac{i\hbar t}{2m}$ imaginaire pur : le prolongement est licite par holomorphicité en a sur $\{\operatorname{Re} a > 0\}$ et continuité au bord (au sens $\mathcal{S}'$) : on approche par $a_\varepsilon = \varepsilon + \frac{i\hbar t}{2m}$ et on passe à la limite — c'est la rotation de Wick, ici démontrée et non postulée. (3) La borne L^∞ : module du noyau constant $= \left(\frac{m}{2\pi \hbar |t|} \right)^{N/2}$, puis Young. $\square$

Intuition

Comparons les trois noyaux :

$$\underbrace{K_t \propto e^{-x^2/4\kappa t}}_{\text{chaleur : amortit}} \quad \underbrace{U_t \propto e^{+imx^2/2\hbar t}}_{\text{Schrödinger : oscille}} \quad \underbrace{E_+ \propto \delta(|x| - ct)}_{\text{ondes : transporte}}.$$

Schrödinger, c'est la chaleur *en temps imaginaire* ($t \rightarrow it$) : mêmes gaussiennes, mais la décroissance devient oscillation, la perte L^2 devient unitarité, et la dissipation devient *dispersion* — les composantes rapides (ξ grand) voyagent plus vite (vitesse de groupe $\hbar\xi/m$), le paquet s'étale en gardant sa norme. Cette correspondance $t \leftrightarrow it$ (Wick) sera notre pont officiel entre mécanique quantique et physique statistique : $e^{-iHt/\hbar} \leftrightarrow e^{-\beta H}$ (chapitre 13).

Application physique

Étalement d'un paquet gaussien de largeur initiale σ : $\sigma(t) = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma^2} \right)^2}$ (calcul gaussien direct avec (9.3)). Un électron localisé à l'ångström s'étale au millimètre en $\sim 10^{-8}$ s : la localisation quantique est instable, et c'est la mesure (ou la décohérence) qui relocalise. Le TD 9 anime cet étalement et vérifie la loi $\sigma(t)$.

Au notebook compagnon

TD 9 du notebook — animation comparée des trois équations sur la même donnée initiale (créneau + paquet gaussien) : chaleur (lisse et amortit), ondes (transporte, Huygens en 1D vs 3D par moyennes sphériques), Schrödinger (disperse, oscille — méthode split-step Fourier) ; loi d'étalement $\sigma(t)$ vérifiée par ajustement (`optimizr.grid_search`).

9.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 9.5 (Le rayonnement dipolaire : de l'antenne au bleu du ciel). Une source oscillante compacte ($\dot{\mathbf{p}}(t)$, taille $a \ll \lambda$) rayonne, via les potentiels retardés de l'exemple 4.13, le champ lointain

$$\mathbf{E}_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} [\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c))], \quad P = \frac{\mu_0 \langle |\dot{\mathbf{p}}|^2 \rangle}{6\pi c} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c} :$$

la puissance croît comme ω^4 . **Trois conséquences à travers dix-huit ordres de grandeur :** (a) *le ciel est bleu* : une molécule d'air, polarisable, se comporte en dipôle induit $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{soleil}}$; la section efficace de diffusion Rayleigh hérite du ω^4 : le bleu (450 nm) diffuse $(700/450)^4 \approx 5,9$ fois plus que le rouge — et le soleil couchant, vu à travers 40 fois plus d'air, est rouge par soustraction ; (b) *l'antenne demi-onde* : résistance de rayonnement $R_{\text{ray}} = 73 \Omega$ — c'est pourquoi les câbles coaxiaux font 75Ω ; (c) *la raie à 21 cm* : la transition hyperfine de H est dipolaire *magnétique* (dipôle électrique interdit par parité, exercice 17.2), supprimée par $(v/c)^2$: durée de vie $\tau \approx 11$ Millions — assez long pour que l'hydrogène galactique ne se soit pas éteint, assez intense à l'échelle d'une galaxie pour cartographier sa rotation (et découvrir la matière noire). Les règles de sélection du chapitre 17 décident qui rayonne.

Exemple 9.6 (Doppler relativiste et aberration : la phase est un scalaire). La phase d'une onde plane, $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_\mu x^\mu$, compte des crêtes : c'est un invariant de Lorentz, donc $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ est un quadrivecteur (chap. 18, exercice 18.3). Boostons à la vitesse v : $\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta)$ (Doppler) et $\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}$ (aberration). (a) *Le dipôle du fond diffus* : le CMB est isotrope dans son référentiel ; notre mouvement ($v_\odot = 370$ km/s, $\beta \approx 1,2 \times 10^{-3}$) le module en $T(\theta) = T_0(1 + \beta \cos \theta)$: le dipôle de 3,36 mK mesuré par COBE/Planck — on lit notre vitesse absolue par rapport à l'univers jeune directement dans la formule de Doppler. (b) *Phare relativiste* : pour $\gamma \gg 1$, l'aberration comprime tout l'hémisphère avant dans un cône $\theta' \sim 1/\gamma$: un électron de 1 GeV au synchrotron ($\gamma \approx 2000$) émet dans 0,5 mrad — combiné au ω^4 dipolaire vu dans le référentiel tournant, c'est ce qui fait des anneaux synchrotron les sources X les plus brillantes (chap. 18, §18.6) ; le TD 18 trace l'aplatissement du diagramme d'émission quand β croît. (c) *Jets superlumineux apparents* : un blazar dont le jet ($\beta \approx 0,998$) pointe presque vers nous montre des nœuds se déplaçant à $v_{\text{app}} = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} c$ jusqu'à $\sim 15c$ — pure cinématique de temps retardé, aucune violation causale : l'intervalle (18.1) veille.

9.5 Exercices corrigés

Exercice 9.1 (★) — Corde pincée

Résoudre la corde infinie avec $u_0 =$ tente de hauteur h sur $[-a, a]$, $u_1 = 0$; dessiner u à $t = a/2c, a/c, 2a/c$.

Solution détaillée

Par (9.1), $u = \frac{1}{2}[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)]$: la tente se scinde en deux demi-tentes d'amplitude $h/2$ partant en sens opposés ; à $t = a/c$ elles se séparent exactement ; ensuite deux tentes disjointes glissent. Aucun étalement, aucune atténuation : transport pur. ✓

Exercice 9.2 (★★) — Énergie équipartie

Montrer que pour la corde ($N = 1$), après le temps de séparation ($t >$ diamètre du support/ $2c$), l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \int |\partial_t u|^2$ et l'énergie potentielle $\frac{c^2}{2} \int |\partial_x u|^2$ sont *exactement égales*.

Solution détaillée

(1) $u = F(x - ct) + G(x + ct)$: $\partial_t u = -cF' + cG'$, $\partial_x u = F' + G'$. (2) Après séparation, les supports de $F'(\cdot - ct)$ et $G'(\cdot + ct)$ sont disjoints : les termes croisés $\int F'G'$ s'annulent. (3) Alors $\int |\partial_t u|^2 = c^2 \int (F'^2 + G'^2) = c^2 \int |\partial_x u|^2$: équipartition exacte. C'est un théorème général (equipartition of energy) valable asymptotiquement en toute dimension — l'analogue

dynamique du théorème du viriel. ✓

Exercice 9.3 (*** — Rotation de Wick explicite

Vérifier que $K_{i\tau}^{(\text{chaleur})}$ prolongé ($\kappa = \frac{\hbar}{2m}$, $t \rightarrow i\tau$) redonne (9.3), puis montrer que le noyau de Mehler de l'oscillateur harmonique euclidien

$$K_{\tau}^{\text{osc}}(x, y) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\omega\tau)}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} \frac{(x^2 + y^2) \cosh(\omega\tau) - 2xy}{\sinh(\omega\tau)}\right)$$

se réduit au noyau libre quand $\omega \rightarrow 0$ et donne, pour $\tau \rightarrow \infty$, l'état fondamental gaussien.

Solution détaillée

(1) Substitution directe : $4\kappa t \rightarrow 4\frac{\hbar}{2m}(i\tau) = \frac{2i\hbar\tau}{m}$, donc $e^{-x^2/4\kappa t} \rightarrow e^{+imx^2/2\hbar\tau}$ et le préfacteur $(4\pi\kappa t)^{-1/2} \rightarrow (2\pi i\hbar\tau/m)^{-1/2}$: c'est (9.3). ✓ (2) $\omega \rightarrow 0$: $\sinh \omega\tau \sim \omega\tau$, $\cosh \rightarrow 1$; l'exposant devient $-\frac{m}{2\hbar\tau}(x - y)^2$ et le préfacteur $\sqrt{m/2\pi\hbar\tau}$: noyau de la chaleur libre. ✓ (3) $\tau \rightarrow \infty$: $\cosh, \sinh \sim \frac{1}{2}e^{\omega\tau}$, l'exposant tend vers $-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2)$ et $K_{\tau}^{\text{osc}} \sim e^{-\omega\tau/2} \psi_0(x)\psi_0(y) \cdot \text{const}$ avec $\psi_0 \propto e^{-m\omega x^2/2\hbar}$: le propagateur euclidien à grand temps projette sur l'état fondamental, et le taux $e^{-\omega\tau/2}$ lit l'énergie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. Ce mécanisme — extraire le fondamental par temps imaginaire long — est la méthode de calcul de la partie C (et des simulateurs Monte Carlo quantiques). ✓

Troisième partie

Théorie statistique des champs

Chapitre 10

Physique statistique d'équilibre : fonctions de corrélation et réponse

La partie C commence ici. Ce chapitre reprend le chapitre 2 de P. Simon en le développant : ensembles statistiques, fonctions de corrélation, réponse linéaire statique, et le passage au continu qui transforme la physique statistique en *théorie des champs*.

Prérequis / rappel

Probabilités élémentaires (espérance, variance, fonction génératrice) ; intégrale gaussienne (1.2) et moments de Wick (exercice 1.2) ; mesure de Gibbs (prop. 8.5).

10.1 Mesure de Gibbs et fonction de partition

Définition 10.1. Un système de configurations $\mathcal{C}$ (spins, positions, champ) et d'énergie $E[\mathcal{C}]$ en contact avec un thermostat à température $T = 1/k_B\beta$ est décrit par la *mesure de Gibbs canonique*

$$\mathbb{P}[\mathcal{C}] = \frac{e^{-\beta E[\mathcal{C}]}}{Z}, \quad Z(\beta) = \sum_{\mathcal{C}} e^{-\beta E[\mathcal{C}]}.$$

L'énergie libre est $F = -k_B T \log Z$; toute la thermodynamique s'en déduit par dérivation : $\langle E \rangle = -\partial_\beta \log Z$, $C_v = k_B \beta^2 \partial_\beta^2 \log Z = k_B \beta^2 (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)$.

Idée-clé

La dernière égalité — chaleur spécifique = variance de l'énergie — est le premier exemple du lien *réponse* $\leftrightarrow$ *fluctuations* qui structure tout le cours : dériver $\log Z$ par rapport à un paramètre *engendre les cumulants*. $\log Z$ est une fonction génératrice : la physique statistique est une théorie des fonctions génératrices, et la théorie des champs en sera le prolongement fonctionnel.

Exemple 10.2 (Le paramagnétique parfait, calcul complet). n spins indépendants $\sigma_i = \pm 1$ dans un champ h : $E = -h \sum_i \sigma_i$. La factorisation donne $Z = (2 \cosh \beta h)^n$, d'où l'aimantation

$$m = \frac{1}{n} \frac{\partial \log Z}{\partial (\beta h)} = \tanh(\beta h), \quad \chi = \frac{\partial m}{\partial h} \Big|_{h=0} = \beta \quad (\text{loi de Curie } \chi \propto 1/T).$$

Et la variance : $\langle \sigma_i^2 \rangle - \langle \sigma_i \rangle^2 = 1 - \tanh^2(\beta h) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m}{\partial h}$: *réponse* = *fluctuation*, déjà.

10.2 Fonctions de corrélation

Définition 10.3. Pour un champ de spins $\{\sigma_i\}$ (ou un champ continu $\phi(x)$), les fonctions de corrélation à k points sont $\langle \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k} \rangle$. La *corrélation connexe* à deux points est

$$G_{ij}^{(c)} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle.$$

Dans une phase homogène, $G_{ij}^{(c)} = G(|r_i - r_j|)$, et l'on définit la *longueur de corrélation* ξ par la décroissance $G(r) \sim e^{-r/\xi}$ (r grand).

Exemple 10.4 (Chaîne d'Ising 1D : solution exacte par matrice de transfert). $E = -J \sum_{i=1}^n \sigma_i \sigma_{i+1}$ (périodique). L'astuce : écrire $Z = \text{Tr}(T^n)$ avec la matrice de transfert

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} \end{pmatrix}, \quad \text{valeurs propres } \lambda_{\pm} = 2 \cosh \beta J, \quad 2 \sinh \beta J.$$

Donc $Z = \lambda_+^n + \lambda_-^n$ et, pour $n \rightarrow \infty$, $F/n \rightarrow -k_B T \log(2 \cosh \beta J)$: analytique en $T > 0$, *pas de transition de phase en dimension 1*. La corrélation :

$$\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^r = (\tanh \beta J)^r = e^{-r/\xi}, \quad \xi = \frac{-1}{\log \tanh \beta J} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{e^{2\beta J}}{2}.$$

ξ diverge seulement à $T = 0$: le point critique de la chaîne est à température nulle. *Moralité technique* : la matrice de transfert transforme une somme sur configurations en algèbre linéaire — c'est un prototype d'intégrale de chemin discrète (le chapitre 13 fera le trajet inverse : intégrale de chemin $\rightarrow$ opérateur de transfert $e^{-\varepsilon H}$).

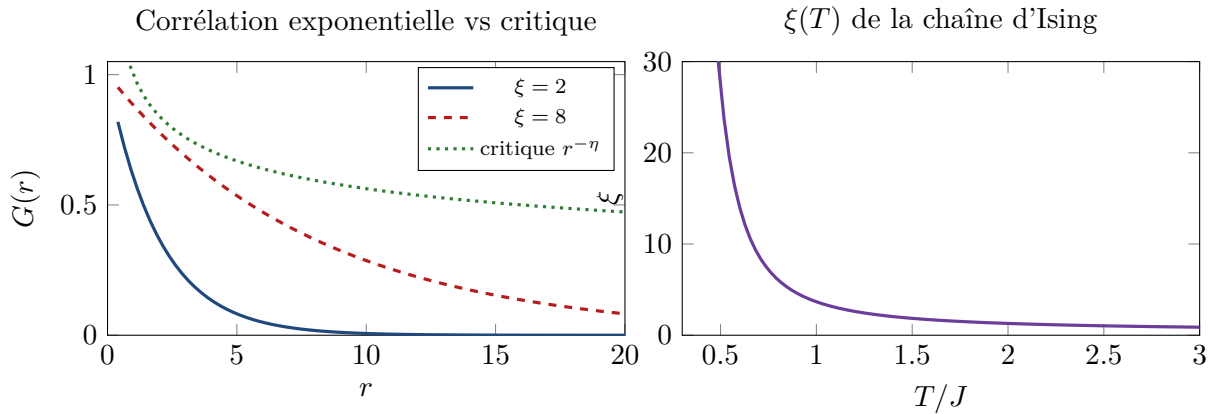


FIGURE 10.1 – Gauche : en phase ordinaire $G \sim e^{-r/\xi}$; au point critique la décroissance devient une loi de puissance $r^{-\eta}$ (perte d'échelle caractéristique). Droite : $\xi(T)$ exacte de la chaîne d'Ising — divergence à $T \rightarrow 0$.

10.3 Champ extérieur et réponse linéaire statique

Théorème 10.5 (Théorème fluctuation-réponse statique). *Couplons le système à un champ local : $E \rightarrow E - \sum_i h_i \sigma_i$. Alors*

$$\left. \frac{\partial \langle \sigma_i \rangle}{\partial h_j} \right|_{h=0} = \beta G_{ij}^{(c)}, \quad \text{d'où la susceptibilité} \quad \chi = \beta \sum_j G_{ij}^{(c)} = \beta \widehat{G^{(c)}}(q=0). \quad (10.1)$$

Démonstration. $\langle \sigma_i \rangle_h = \frac{1}{Z[h]} \sum_{\mathcal{C}} \sigma_i e^{-\beta E + \beta \sum_j h_j \sigma_j}$. Dérivons en h_j : le numérateur produit $\beta \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$, la dérivée du $\frac{1}{Z}$ produit $-\beta \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$: exactement $\beta G_{ij}^{(c)}$. La somme sur j (champ uniforme) donne la transformée de Fourier en $q = 0$. $\square$

Intuition

(10.1) explique la *divergence de la susceptibilité au point critique* : si $\xi \rightarrow \infty$, la somme $\sum_j G_{ij} \sim \int e^{-r/\xi} d^d r \sim \xi^d$ diverge — un système critique répond infiniment fort à une sollicitation infinitésimale, parce que ses fluctuations sont corrélées à toutes les échelles. L'opalescence critique (un fluide au point critique diffuse la lumière comme du lait) est la manifestation optique directe de (10.1).

10.4 Du réseau au continuum : le champ $\phi(x)$

Près d'un point critique, $\xi \gg a$ (maille du réseau) : les détails microscopiques deviennent invisibles et l'aimantation locale, moyennée sur des blocs mésoscopiques, définit un *champ continu* $\phi(x)$. L'énergie effective la plus générale compatible avec les symétries (invariance par translation, rotation, et $\phi \rightarrow -\phi$ pour Ising) est la fonctionnelle de *Ginzburg–Landau* :

$$\beta E[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{r_0}{2} \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 - h(x) \phi(x) \right], \quad (10.2)$$

et la fonction de partition devient une *intégrale fonctionnelle*

$$Z[h] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\beta E[\phi]} \quad (\text{somme sur toutes les configurations du champ}). \quad (10.3)$$

Remarque 10.6 (Que signifie $\mathcal{D}\phi$?). Rigoureusement : discrétiser l'espace en un réseau de maille a , poser $\mathcal{D}\phi = \prod_x d\phi(x)$ (produit fini), calculer, puis étudier la limite $a \rightarrow 0$ à observables fixées. La partie gaussienne ($u = 0$) admet une limite parfaitement définie (mesure gaussienne de covariance $(-\Delta + r_0)^{-1}$, notre chapitre 7!); le terme ϕ^4 exige la renormalisation. Dans tout ce cours, $\mathcal{D}\phi$ signifie « limite du réseau », et chaque calcul gaussien est légitimé par le chapitre 5.

Exemple 10.7 (Corrélations du champ libre : retour de Yukawa). Pour $u = 0$, $Z[h]$ est gaussienne : en complétant le carré fonctionnel (l'idée-clé du chapitre 1, version opérateur),

$$\log \frac{Z[h]}{Z[0]} = \frac{1}{2} \iint h(x) G(x-y) h(y) dx dy, \quad G = (-\Delta + r_0)^{-1},$$

d'où $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle^{(c)} = G(x-y)$: la *corrélation du champ libre* est la *fonction de Green de Yukawa* (exercice 5.2, chapitre 7), de portée $\xi = r_0^{-1/2}$. En dimension 3 : $G(r) = \frac{e^{-r/\xi}}{4\pi r}$. Le point critique est $r_0 \rightarrow 0$: masse nulle, corrélation coulombienne $1/r$, perte d'échelle. Toute la partie B se recycle ici : les *EDP elliptiques deviennent des covariances*.

Application physique — Théorie de Landau et exposants classiques

En champ moyen (négliger les fluctuations : chercher le minimum de (10.2) pour ϕ constant), avec $r_0 \propto T - T_c$:

$$\phi_{\text{eq}} = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \pm \sqrt{-6r_0/u} \propto (T_c - T)^{1/2} & T < T_c \end{cases}$$

d'où $\beta_{\text{exp}} = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ ($\chi \sim |r_0|^{-1}$), $\delta = 3$, $\nu = \frac{1}{2}$. Ces exposants « classiques » sont *faux* en dimension $d < 4$ (Ising 2D exact d'Onsager : $\beta_{\text{exp}} = \frac{1}{8}$!) : les fluctuations les corrigent, et le critère de Ginzburg montre qu'elles dominent pour $d < 4$ — la dimension critique supérieure. Le calcul de ces corrections est précisément l'objet de la diagrammatique du chapitre 12.

Au notebook compagnon

TD 10 du notebook — Ising 1D : matrice de transfert exacte vs Monte-Carlo Metropolis (`optimizr.mcmc_sample` sur l'énergie de chaîne); corrélation $e^{-r/\xi}$ mesurée et $\xi(T)$ comparée à la formule exacte; Ising 2D : animation des configurations à $T < T_c$, $T \approx T_c$, $T > T_c$ (clusters critiques) et cumulant de Binder pour localiser $T_c \approx 2,269$.

10.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 10.8 (Le flambage d'une lame : la transition de phase sur votre bureau). Comprimez une règle plastique entre deux doigts avec une force F croissante : en dessous de la charge critique d'Euler $F_c = \pi^2 EI/L^2$, elle reste droite ; au-delà, elle saute à gauche *ou* à droite. C'est le modèle mécanique de brisure spontanée du chapitre 17 (exemple 17.17), et il reproduit *quantitativement* la théorie de Landau (10.2) : l'énergie élastique en fonction de la flèche x est

$$V(x) = \underbrace{a(F_c - F)}_{r(T) \leftrightarrow (T - T_c)} x^2 + b x^4,$$

le même polynôme que pour l'aimantation, avec le dictionnaire $F \leftrightarrow T$, $x \leftrightarrow m$. **Prédictions vérifiables à la maison** : flèche $x^* \propto (F - F_c)^{1/2}$ (exposant champ moyen $\beta = 1/2$) ; fréquence des petites oscillations autour de l'état droit $\omega \propto (F_c - F)^{1/2} \rightarrow 0$ à l'approche du seuil (mode mou, annonciateur universel des transitions) ; réponse à une poussée latérale h : $\chi = \partial x / \partial h \propto |F - F_c|^{-1}$ (divergence de la susceptibilité, $\gamma = 1$). Différence essentielle avec l'aimant : ici le « paramètre d'ordre » est macroscopique et sans fluctuations — le champ moyen est *exact* ; pour Ising 3D les fluctuations corrigent β à 0,326 (chap. 16).

Exemple 10.9 (Curie–Weiss résolu complètement : le champ moyen comme point col). Le modèle d'Ising « à portée infinie » (chaque spin interagit avec tous, J/N) est exactement soluble et justifie le champ moyen. Sa fonction de partition, après l'astuce de Hubbard–Stratonovich (une gaussienne du chapitre 1 lue à l'envers !) :

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{\frac{\beta J}{2N} (\sum_i s_i)^2} = \sqrt{\frac{N\beta J}{2\pi}} \int dm e^{-N\beta [\frac{Jm^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log(2 \cosh \beta J m)]} :$$

une intégrale de Laplace (chap. 12) que le point col domine quand $N \rightarrow \infty$. La condition de col $m = \tanh(\beta J m)$ est *l'équation auto-cohérente du champ moyen* — déduite, pas postulée. Analyse graphique : pour $\beta J < 1$ seule $m = 0$; pour $\beta J > 1$, deux solutions $\pm m^*$ apparaissent (brisure de $\mathbb{Z}_2$), avec $m^* \simeq \sqrt{3(1 - T/T_c)}$ près de $T_c = J/k_B$. **Où le champ moyen dit vrai/faux** : exact pour le supraconducteur BCS (portée effective des paires $\xi \sim 1 \mu\text{m} \gg$ maille : chaque paire « voit » $\sim 10^6$ voisins — portée quasi infinie réalisée) ; qualitatif pour Ising 3D ; *faux* pour Ising 1D (où il prédit une transition qui n'existe pas, exemple 10.4) : le critère de Ginzburg situe la frontière à $d = 4$, point de départ du chapitre 16. Le TD 10 compare $m(T)$ de Curie–Weiss à l'Ising 2D simulé.

10.6 Exercices corrigés

Exercice 10.1 (★) — Cumulants et génératrice

Montrer que $\log \langle e^{tX} \rangle = \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} c_k$ engendre les *cumulants* : $c_1 = \langle X \rangle$, $c_2 = \text{Var } X$, $c_3 = \langle (X - \langle X \rangle)^3 \rangle$. Que valent tous les c_k , $k \geq 3$, pour une gaussienne ?

Solution détaillée

Développer l'exponentielle et le logarithme : $\log(1 + m_1 t + \frac{m_2}{2} t^2 + \dots)$ et identifier : $c_1 = m_1$, $c_2 = m_2 - m_1^2$, $c_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$ — les formules moments $\rightarrow$ cumulants. Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $\log\langle e^{tX} \rangle = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$ exactement (compléter le carré, (1.2)) : *tous les cumulants d'ordre ≥ 3 sont nuls*. C'est la caractérisation de Wick : gaussien = que des paires. Les diagrammes *connexes* de la théorie des champs sont exactement les cumulants du champ. ✓

Exercice 10.2 (**) — Ising 1D en champ

Ajouter un champ h à la chaîne d'Ising et calculer Z par matrice de transfert. En déduire $m(h, T)$ et vérifier la loi de Curie modifiée $\chi(T) = \beta e^{2\beta J}$ à $h = 0$.

Solution détaillée

(1) $T = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{pmatrix}$, $\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \cosh \beta h \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}}$. (2) $m = \frac{1}{n\beta} \partial_h \log \lambda_+^n = \frac{e^{\beta J} \sinh \beta h}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}}}$. (3) $\chi = \partial_h m|_0 = \beta e^{2\beta J}$: la corrélation ferromagnétique *renforce* la réponse d'un facteur $e^{2\beta J} = \sum_r e^{-r/\xi}$ -ish — cohérent avec (10.1) et $\xi \approx \frac{e^{2\beta J}}{2}$. ✓

Exercice 10.3 (***) — Argument de Peierls (existence d'une transition en 2D)

Esquisser l'argument de Peierls : en dimension 2, à basse température, la probabilité qu'un spin donné soit renversé par rapport au bord est majorée par $\sum_{L \geq 4} L 3^L e^{-2\beta J L} < \frac{1}{2}$ pour β grand. Conclure à l'existence d'aimantation spontanée.

Solution détaillée

(1) Un spin $-$ dans une mer de $+$ est entouré d'un *contour* de longueur L (frontière des liens frustrés), de coût énergétique $2JL$. (2) Dénombrement : les contours de longueur L entourant l'origine sont au plus $L \cdot 3^L$ (départ sur $\leq L$ positions utiles, à chaque pas ≤ 3 directions). (3) Union bound : $\mathbb{P}[\sigma_0 = -1] \leq \sum_{L \geq 4} L 3^L e^{-2\beta J L}$, série géométrique convergente, $< \frac{1}{2}$ pour β assez grand : le spin reste majoritairement aligné avec le bord même à la limite thermodynamique — aimantation spontanée, donc transition de phase (contraste absolu avec la dimension 1, exemple 10.4, où les « contours » sont des paires de parois de coût fini $4J$ indépendant de leur écartement : l'entropie gagne toujours). L'énergie *vs* l'entropie des défauts topologiques : le critère universel d'existence d'ordre. ✓

Chapitre 11

L'intégrale fonctionnelle gaussienne et les systèmes élastiques

Ce chapitre installe l'outil central de tout le reste du cours : l'intégrale fonctionnelle gaussienne. On la construit proprement (discrétisation, diagonalisation de Fourier, limite), on calcule le propagateur, et on l'applique aux systèmes élastiques (cordes, membranes, interfaces) — le laboratoire où tout est exact.

Prérequis / rappel

Intégrale gaussienne multidimensionnelle (idée-clé du chapitre 1) ; séries et transformées de Fourier (chapitre 5) ; champ libre (exemple 10.7).

11.1 Intégrale gaussienne en dimension n , proprement

Théorème 11.1. Soit A une matrice réelle symétrique définie positive $n \times n$ et $j \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}x^\top Ax + j^\top x\right) d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left(\frac{1}{2}j^\top A^{-1}j\right). \quad (11.1)$$

Les moments s'obtiennent en dérivant par rapport à j :

$$\langle x_i x_j \rangle = (A^{-1})_{ij}, \quad \langle x_{i_1} \cdots x_{i_{2k}} \rangle = \sum_{\text{appariements } P} \prod_{(a,b) \in P} (A^{-1})_{i_a i_b} \quad (\text{théorème de Wick}). \quad (11.2)$$

Démonstration. **(1)** Compléter le carré : $x = A^{-1}j + y$; $-\frac{1}{2}x^\top Ax + j^\top x = -\frac{1}{2}y^\top Ay + \frac{1}{2}j^\top A^{-1}j$. **(2)** Diagonaliser : $A = O^\top \Lambda O$ orthogonalement ; le changement $z = Oy$ (jacobien 1) factorise en n gaussiennes unidimensionnelles (1.2) : $\prod_i \sqrt{2\pi/\lambda_i} = (2\pi)^{n/2}/\sqrt{\det A}$. **(3)** Wick : dériver (11.1) $2k$ fois en j puis poser $j = 0$. Chaque dérivée ∂_{j_i} appliquée à $e^{\frac{1}{2}j^\top A^{-1}j}$ doit être saturée par une autre pour survivre à $j = 0$: les termes non nuls sont exactement les appariements des $2k$ indices, chacun contribuant $(A^{-1})_{i_a i_b}$. Le nombre d'appariements de $2k$ objets est $(2k-1)!!$ — on retrouve l'exercice 1.2. $\square$

Idée-clé

Tout est déjà là : $A \rightarrow$ opérateur différentiel (par exemple $-\Delta + m^2$), $A^{-1} \rightarrow$ fonction de Green = *propagateur*, $j \rightarrow$ source extérieure, $\det A \rightarrow$ déterminant fonctionnel (= énergie du vide), Wick $\rightarrow$ diagrammes. La théorie des champs gaussienne est l'algèbre linéaire de la partie B.

11.2 La corde élastique thermique : calcul exact

Considérons une corde de longueur L , tension κ , fixée aux deux bouts, décrite par sa hauteur $\phi(x)$, en équilibre thermique :

$$\beta E[\phi] = \frac{\beta \kappa}{2} \int_0^L (\partial_x \phi)^2 dx, \quad Z = \int_{\phi(0)=\phi(L)=0} \mathcal{D}\phi e^{-\beta E[\phi]}.$$

Proposition 11.2 (Modes propres et équipartition). *En développant $\phi(x) = \sum_{k \geq 1} c_k \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k\pi x}{L}$, l'énergie devient diagonale : $\beta E = \frac{\beta \kappa}{2} \sum_k q_k^2 c_k^2$ avec $q_k = k\pi/L$, et*

$$\langle c_k c_{k'} \rangle = \frac{\delta_{kk'}}{\beta \kappa q_k^2} \quad (\text{équipartition : } \frac{\kappa q_k^2}{2} \langle c_k^2 \rangle = \frac{1}{2\beta} = \frac{k_B T}{2}),$$

d'où la fonction de corrélation exacte (série calculable)

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \frac{1}{\beta \kappa} G_L(x, y), \quad G_L(x, y) = \frac{x(L-y)}{L} \quad (x \leq y),$$

la fonction de Green de $-\partial_x^2$ sur $[0, L]$ avec Dirichlet.

Démonstration. **(1)** La base sin diagonalise $-\partial_x^2$ avec Dirichlet ; Parseval transforme $\int (\partial_x \phi)^2$ en $\sum q_k^2 c_k^2$. **(2)** L'intégrale fonctionnelle se factorise en gaussiennes indépendantes sur chaque c_k : théorème 11.1 en dimension 1 par mode, d'où la covariance $1/(\beta \kappa q_k^2)$. **(3)** La série $\frac{2}{L} \sum_k \frac{\sin q_k x \sin q_k y}{q_k^2}$ est le développement en modes propres du noyau de Green ; on vérifie que $g(x) = \frac{x(L-y)}{L}$ ($x \leq y$) satisfait $-g'' = \delta_y$ (formule des sauts (3.4) : pente $\frac{L-y}{L}$ puis $-\frac{y}{L}$, saut de dérivée -1 en y ✓) et les conditions de bord. $\square$

Application physique — Rugosité d'une interface

Le déplacement quadratique : $\langle \phi(x)^2 \rangle = \frac{x(L-x)}{\beta \kappa L} \leq \frac{L}{4\beta \kappa}$: la corde thermique est rugueuse, ses fluctuations croissent comme $\sqrt{L}$. En dimension d d'interface, le même calcul donne $\langle \phi^2 \rangle \sim \int^{q_{\max}} \frac{d^d q}{q^2}$: divergent infrarouge pour $d \leq 2$ (interfaces rugueuses : cordes, membranes molles), fini pour $d > 2$ (interfaces lisses). Ce *comptage infrarouge* est le théorème de Mermin–Wagner en germe : pas d'ordre continu brisé en $d \leq 2$ à température finie.

11.3 Fonctionnelle génératrice et propagateur

Définition 11.3 (Fonctionnelle génératrice).

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[\phi] + \int j\phi\right), \quad W[j] = \log Z[j], \quad (11.3)$$

avec $S[\phi] = \frac{1}{2} \int \phi \hat{A} \phi + S_{\text{int}}[\phi]$. Les dérivées fonctionnelles engendrent les corrélations :

$$\left. \frac{\delta^k W}{\delta j(x_1) \cdots \delta j(x_k)} \right|_{j=0} = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_k) \rangle^{(c)} \quad (\text{corrélations connexes}).$$

Remarque 11.4 (Dérivée fonctionnelle : mode d'emploi). $\frac{\delta}{\delta j(x)}$ est définie par $\frac{\delta j(y)}{\delta j(x)} = \delta(x-y)$ + règles de Leibniz et de composition : c'est la version continue de $\partial/\partial j_i$ avec $i \rightarrow x$, et la masse de Dirac du chapitre 3 y joue le rôle du symbole de Kronecker. Exemple : $\frac{\delta}{\delta j(x)} \exp \int j\phi = \phi(x) \exp \int j\phi$. Toute la combinatoire du théorème 11.1 se transcrit alors telle quelle.

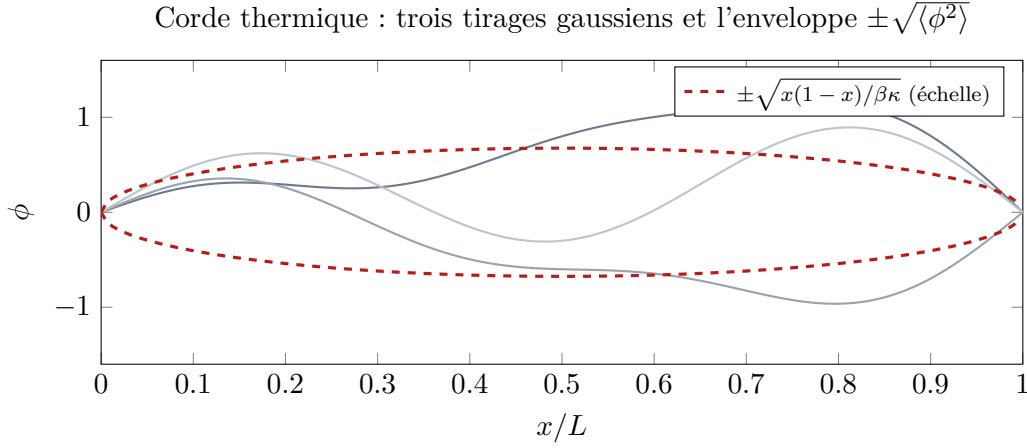


FIGURE 11.1 – Tirages du champ gaussien de la corde et enveloppe théorique $\sqrt{\langle\phi(x)^2\rangle}$: le profil des fluctuations suit la fonction de Green Dirichlet. Le TD 11 reproduit cette figure par échantillonnage spectral exact.

Théorème 11.5 (Théorie libre). *Pour $S_{\text{int}} = 0$ et $\hat{A} = -\Delta + m^2$:*

$$W[j] = W[0] + \frac{1}{2} \iint j(x) G(x-y) j(y), \quad \hat{G}(q) = \frac{1}{q^2 + m^2},$$

et Wick (11.2) donne toutes les corrélations : $\langle\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\rangle = G_{12}G_{34} + G_{13}G_{24} + G_{14}G_{23}$.

C'est l'exemple 10.7 réécrit dans le langage génératrice — désormais notre langage permanent.

Application finance / signal

La régression ridge/krigeage est *exactement* ce formalisme : un prior gaussien de covariance G sur une fonction inconnue, des observations linéaires bruitées, et le posterior s'obtient en complétant le carré (11.1) — les processus gaussiens du machine learning *sont* des théories de champs libres, le noyau RBF jouant le rôle du propagateur. Le TD 11 échantillonne le champ de covariance $(q^2 + m^2)^{-1}$ et fait varier la masse m pour visualiser la longueur de corrélation.

Au notebook compagnon

TD 11 du notebook — échantillonnage spectral exact du champ gaussien 1D et 2D : modes de Fourier indépendants de variance $(q^2 + m^2)^{-1}$, animation de la texture du champ quand $m \rightarrow 0$ (divergence de ξ , apparition des grandes structures) ; vérification de Wick à 4 points ; enveloppe de la corde (fig. 11.1) reproduite ; lien processus gaussiens / krigeage.

11.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 11.6 (Le facteur de Debye–Waller : pourquoi la diffraction survit à l'agitation thermique). La diffraction de von Laue (exemple 5.11) suppose les atomes fixes ; en réalité chacun vibre, $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_n^0 + \mathbf{u}_n$, où $\mathbf{u}_n$ est un *champ gaussien* (les phonons à l'équilibre thermique : modes normaux indépendants, chacun un oscillateur gaussien). L'amplitude de Bragg au vecteur $\mathbf{K}$ contient $\langle e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}} \rangle$ — exactement la fonction génératrice gaussienne (11.3) :

$$\langle e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle(\mathbf{K}\cdot\mathbf{u})^2\rangle} \equiv e^{-W}, \quad I_{\text{Bragg}} = I_0 e^{-2W}, \quad W = \frac{1}{6} K^2 \langle u^2 \rangle \text{ (cubique)}.$$

Les pics de Bragg ne s'élargissent pas : ils *s'atténuent*, et le poids perdu part en fond diffus (diffusion inélastique par les phonons). **Chiffres** : pour l'aluminium à 300 K, $\sqrt{\langle u^2 \rangle} \approx 0,1 \text{ \AA}$, et pour une réflexion typique $2W \approx 0,3$: l'intensité tient à 74% — c'est pourquoi la cristallographie fonctionne à température ambiante. En abaissant T , $e^{-2W} \rightarrow \text{cste} > 0$ (vibrations de point zéro) : même à $T = 0$ le cristal quantique vibre. **Bonus dimensionnel** : en $d = 2$, $\langle u^2 \rangle = \int \frac{d^2 k}{k^2}$ diverge logarithmiquement (infrarouge) : pas d'ordre cristallin vrai en 2D (Mermin–Wagner, les Goldstone du chapitre 17 le détruisent) — le graphène n'existe que stabilisé par ses ondulations hors plan et la croissance $\propto \log$ reste observable dans ses pics de diffraction élargis.

Exemple 11.7 (Ondes capillaires : la rugosité d'une interface calculée par intégrale gaussienne). Une interface eau–air de hauteur $h(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$) coûte l'énergie $E[h] = \int d^2 x [\frac{\gamma}{2} |\nabla h|^2 + \frac{\rho g}{2} h^2]$ (tension de surface $\gamma = 72 \text{ mN/m}$ + gravité) : une action gaussienne, notre champ libre avec la « masse » $m^2 = \rho g / \gamma = 1/\ell_c^2$, où $\ell_c = \sqrt{\gamma / \rho g} = 2,7 \text{ mm}$ est la longueur capillaire. Par équipartition mode à mode $(\frac{1}{2}(\gamma k^2 + \rho g) \langle |h_k|^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T)$:

$$\langle h^2 \rangle = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_B T}{\gamma k^2 + \rho g} = \frac{k_B T}{4\pi\gamma} \log\left(1 + \frac{k_{\max}^2 \gamma}{\rho g}\right) :$$

avec $k_{\max} \sim 2\pi/(0,3 \text{ nm})$ (taille moléculaire), $\sqrt{\langle h^2 \rangle} \approx 3,7 \text{ \AA}$: l'océan, à l'échelle moléculaire, est rugueux de quelques ångströms seulement, et cette rugosité — prédite par la même covariance gaussienne que celle des TD — est mesurée par réflectivité de rayons X rasants (accord à quelques %). Le cutoff gravitationnel ℓ_c joue le rôle de la masse : sans lui ($g \rightarrow 0$, microgravité), les fluctuations divergent $\log$ — encore Mermin–Wagner. Même formalisme, troisième incarnation : les fluctuations de hauteur des membranes biologiques ($\kappa(\Delta h)^2$: rigidité de courbure, spectre en $1/k^4$) qui font « scintiller » les globules rouges au microscope.

11.5 Exercices corrigés

Exercice 11.1 (★) — Wick à 6 points

Combien de termes dans $\langle \phi_1 \cdots \phi_6 \rangle$ libre ? Écrire trois d'entre eux.

Solution détaillée

$(6-1)!! = 15$ appariements. Par exemple $G_{12}G_{34}G_{56}$, $G_{13}G_{25}G_{46}$, $G_{16}G_{24}G_{35}$. La croissance $(2k-1)!! \sim \sqrt{2} (2k/e)^k$ des termes de Wick est la raison combinatoire de la divergence des séries de perturbation (séries asymptotiques, chapitre 12). ✓

Exercice 11.2 (★★) — Déterminant de la corde et fonction zêta

Calculer formellement $\det(-\partial_x^2)$ sur $[0, L]$ (Dirichlet) par régularisation zêta : $\log \det = -\zeta'_A(0)$ avec $\zeta_A(s) = \sum_k \lambda_k^{-s}$.

Solution détaillée

(1) $\lambda_k = (k\pi/L)^2$: $\zeta_A(s) = \sum_{k \geq 1} (k\pi/L)^{-2s} = (L/\pi)^{2s} \zeta(2s)$ (zêta de Riemann). (2) $\zeta'_A(0) = 2 \log(L/\pi) \zeta(0) + 2\zeta'(0) = -\log(L/\pi) - \log(2\pi) = -\log(2L)$, avec $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi$. (3) $\det(-\partial_x^2) = e^{-\zeta'_A(0)} = 2L$: fini ! La régularisation zêta assigne une valeur finie au produit infini $\prod \lambda_k$ en soustrayant implicitement la divergence — même esprit que la partie finie de Hadamard (exercice 3.3). Ce déterminant gouverne le préfacteur à une boucle de toutes les fonctions de partition (chapitre 13 : formule de Gelfand–Yaglom). ✓

Exercice 11.3 (* — Mermin–Wagner quantitatif**

Pour le modèle XY en dimension d ($S = \frac{\beta\kappa}{2} \int |\nabla\theta|^2$, ondes de spin gaussiennes), calculer $\langle\theta(x)^2\rangle \sim \frac{1}{\beta\kappa} \int_{1/L}^{1/a} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2}$ et montrer : divergence logarithmique en L pour $d = 2$; en déduire la décroissance algébrique $\langle e^{i[\theta(x)-\theta(0)]} \rangle \sim |x|^{-1/(2\pi\beta\kappa)}$ (quasi-ordre de Kosterlitz–Thouless).

Solution détaillée

(1) $d = 2$: $\int \frac{q dq}{2\pi q^2} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{L}{a}$: les fluctuations de phase divergent avec la taille — pas d'aimantation spontanée (Mermin–Wagner) ; $d = 3$: intégrale finie, ordre possible. (2) Champ gaussien : $\langle e^{i\Delta\theta} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle\Delta\theta^2\rangle}$ (génératrice gaussienne, (11.1) avec source imaginaire). (3) $\langle[\theta(x) - \theta(0)]^2\rangle = 2[G(0) - G(x)] = \frac{1}{\pi\beta\kappa} \log \frac{|x|}{a}$ (fonction de Green log du chapitre 7, $N = 2$!) : d'où $\langle e^{i\Delta\theta} \rangle = (a/|x|)^{1/(2\pi\beta\kappa)}$ — ni ordre vrai (pas de constante), ni désordre (pas d'exponentielle) : *quasi-ordre* algébrique, détruit à plus haute température par le déliement des vortex (transition BKT). Le $E_2 = \frac{1}{2\pi} \log |x|$ du théorème 7.1 pilote donc directement la physique des films superfluides. ✓

Chapitre 12

Point col, méthode variationnelle et diagrammes de Feynman

Comment calculer une intégrale fonctionnelle *non* gaussienne ? Trois stratégies, du chapitre 3 de P. Simon, ici développées avec tous les calculs : le point col (exact quand un grand paramètre concentre la mesure), la méthode variationnelle (la meilleure gaussienne), et la théorie des perturbations organisée par les diagrammes de Feynman.

Prérequis / rappel

Théorème 11.1 (gaussienne + Wick) ; fonctionnelle génératrice (11.3) ; notion de cumulant (exercice 10.1).

12.1 La méthode du point col (Laplace / phase stationnaire)

Théorème 12.1 (Méthode de Laplace). *Soit $f \in C^2([a, b])$ atteignant son minimum en un unique point intérieur x_0 , avec $f''(x_0) > 0$. Alors, pour $\lambda \rightarrow +\infty$:*

$$\int_a^b e^{-\lambda f(x)} g(x) dx = e^{-\lambda f(x_0)} g(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f''(x_0)}} (1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1})). \quad (12.1)$$

Démonstration. **(1) Localisation** : hors d'un voisinage $|x - x_0| > \delta$, $f(x) \geq f(x_0) + c_\delta$; la contribution y est $\mathcal{O}(e^{-\lambda(f(x_0)+c_\delta)})$, exponentiellement négligeable. **(2) Quadratisation** : près de x_0 , $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3)$; le changement d'échelle $u = \sqrt{\lambda}(x - x_0)$ donne

$$e^{-\lambda f(x_0)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int e^{-\frac{1}{2}f''(x_0)u^2} \left[g(x_0) + \mathcal{O}\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \right] \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{u^3}{\sqrt{\lambda}}\right) \right] du.$$

(3) La gaussienne (1.2) donne le terme principal ; les corrections sont impaires (nulles) ou en $1/\lambda$: développement asymptotique systématique en puissances de $1/\lambda$, dont les coefficients s'organisent en... diagrammes (section 3). $\square$

Exemple 12.2 (Stirling en trois lignes). $n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n^{n+1} \int_0^\infty e^{-n(s - \log s)} ds$ (poser $t = ns$) : col en $s_0 = 1$, $f''(1) = 1$, d'où $n! \sim n^{n+1} e^{-n} \sqrt{2\pi/n} = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$. Le grand paramètre concentre *toute* l'intégrale autour du col — le même mécanisme qui rend la thermodynamique déterministe (exercice 1.4 : concentration de la mesure).

Idée-clé — Le col fonctionnel

Pour $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]/g}$ avec $g \rightarrow 0$ (couplage faible, $\hbar \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty \dots$) : le col est la solution de l'équation du mouvement

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_c} = 0 \quad (\text{équation d'Euler-Lagrange : une EDP de la partie B!}),$$

et

$$Z \simeq e^{-S[\phi_c]/g} [\det S''[\phi_c]]^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(g)).$$

Hierarchie de lecture : l'ordre dominant est la *physique classique* (ϕ_c) ; le déterminant est la contribution des *fluctuations gaussiennes* (« une boucle ») ; les ordres suivants sont les diagrammes. Le TD 12 illustre la précision de (12.1) et la recherche de col par `optimizr.differential_evolution`.

12.2 Méthode variationnelle : l'inégalité de Gibbs–Bogoliubov

Théorème 12.3 (Gibbs–Bogoliubov–Feynman). *Pour toute action d'essai S_0 (gaussienne en pratique) :*

$$F \leq F_0 + \frac{1}{\beta} \langle S - S_0 \rangle_{S_0}, \quad (12.2)$$

où $F = -\frac{1}{\beta} \log Z$, $F_0 = -\frac{1}{\beta} \log Z_0$ et $\langle \cdot \rangle_{S_0}$ la moyenne gaussienne d'essai. On minimise le membre de droite sur les paramètres de S_0 .

Démonstration. **(1)** $Z = Z_0 \langle e^{-(S-S_0)} \rangle_{S_0}$ (multiplier-diviser). **(2)** Convexité de l'exponentielle + inégalité de Jensen : $\langle e^{-X} \rangle \geq e^{-\langle X \rangle}$. **(3)** Prendre $-\frac{1}{\beta} \log$: l'inégalité se renverse et donne (12.2). $\square$

Exemple 12.4 (Oscillateur anharmonique variationnel). $S = \int dx [\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{r_0}{2}\phi^2 + \frac{u}{4!}\phi^4]$; essai gaussien de masse variationnelle r : $S_0 = \frac{1}{2} \int [(\nabla\phi)^2 + r\phi^2]$. Wick donne $\langle \phi^4 \rangle_0 = 3\langle \phi^2 \rangle_0^2$ et le minimum de (12.2) conduit à l'équation *auto-cohérente*

$$r = r_0 + \frac{u}{2} \langle \phi^2 \rangle_0(r), \quad \langle \phi^2 \rangle_0(r) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + r} :$$

la masse effective est décalée par les fluctuations — c'est l'approximation de *champ moyen auto-cohérent* (Hartree). Elle prédit correctement l'existence de la transition mais des exposants classiques : la criticité exige de resommer plus finement (renormalisation).

12.3 Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman

Développons $Z[j]$ en puissances du couplage u (théorie ϕ^4) :

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(-\frac{u}{4!} \int \phi^4 \right)^n e^{\int j\phi}.$$

Chaque terme est une somme de moments *gaussiens*, calculables par Wick (11.2) : chaque appariement se code par un *diagramme*.

Définition 12.5 (Règles de Feynman de ϕ^4 (espace des positions)). — une **ligne** entre x et

y = propagateur $G(x-y)$;

— un **vertex** = $-u \int d^d z$ où quatre lignes se rencontrent ;

— diviser par le **facteur de symétrie** du diagramme (automorphismes) ;

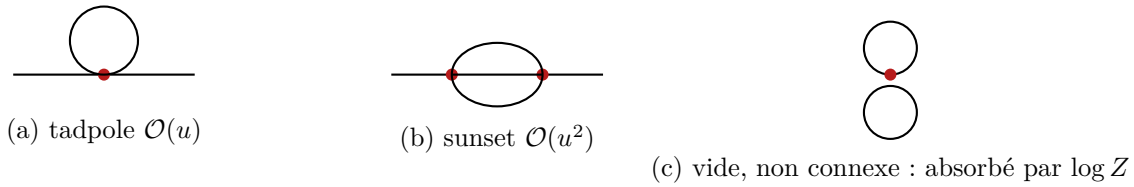


FIGURE 12.1 – Diagrammes de ϕ^4 pour la fonction à deux points : le tadpole (a) décale la masse (c'est le terme de Hartree de l'exemple 12.4) ; le sunset (b) apporte la première correction non triviale ; les diagrammes du vide (c) disparaissent des corrélations connexes.

— $\log Z$ (les cumulants !) ne reçoit que les diagrammes **connexes**.

Théorème 12.6 (Théorème des graphes connexes). $W[j] = \log Z[j]$ est la somme des seuls diagrammes connexes.

Démonstration (argument combinatoire complet). (1) Tout diagramme D se décompose uniquement en composantes connexes C_i avec multiplicités n_i : $D = \prod C_i^{n_i}$. (2) La valeur de D factorise, et son facteur de symétrie contient $\prod n_i!$ (permutation des copies identiques) en plus des symétries internes de chaque C_i . (3) Donc $Z = \sum_D \text{val}(D) = \prod_{C \text{ connexe}} \sum_{n \geq 0} \frac{\text{val}(C)^n}{n!} = \exp\left(\sum_C \text{val}(C)\right)$: en prenant le logarithme, $W = \sum_{C \text{ connexe}} \text{val}(C)$. C'est *exactement* la relation moments-cumulants de l'exercice 10.1, dessinée. $\square$

Exemple 12.7 (Correction de masse à l'ordre u , calcul complet). La fonction à deux points à l'ordre 1 :

$$G^{(2)}(x, y) = G(x - y) - \frac{u}{4!} \int dz \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z)^4 \rangle_0^{\text{connexe}} + \mathcal{O}(u^2).$$

Wick : appairer $\phi(x)$ avec un $\phi(z)$ (4 choix), $\phi(y)$ avec un autre (3 choix), les deux restants ensemble (1 choix) : 12 appariements connexes, d'où

$$G^{(2)} = G - \frac{u}{2} \int dz G(x - z) G(0) G(z - y) + \mathcal{O}(u^2),$$

soit en Fourier $\widehat{G^{(2)}}(q) = \frac{1}{q^2 + r_0} - \frac{u}{2} \frac{G(0)}{(q^2 + r_0)^2} = \frac{1}{q^2 + r_0 + \frac{u}{2} G(0)} + \mathcal{O}(u^2)$: la masse est décalée de $\frac{u}{2} G(0)$, avec $G(0) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + r_0}$ — divergent ultraviolet pour $d \geq 2$! La température critique (où la masse renormalisée s'annule) dépend du cut-off : c'est une quantité *non universelle* ; les exposants critiques, eux, sont universels. Séparer l'universel du contingent est le programme du groupe de renormalisation.

Attention — Les séries de perturbation divergent

Le nombre de diagrammes à l'ordre n croît comme $n!$ (exercice 11.1) : la série en u a un rayon de convergence *nul*. Argument de Dyson : si la série convergerait pour $u < 0$ (potentiel instable), la théorie serait définie là où elle ne l'est pas — absurde. Ces séries sont *asymptotiques* : tronquées à l'ordre optimal $n^* \sim 1/u$, elles atteignent une précision $e^{-1/u}$; les resommer (Borel, Padé) est un art. Le terme manquant $e^{-c/u}$ est un effet *non perturbatif* : l'instanton du chapitre 13.

Au notebook compagnon

TD 12 du notebook — précision de Laplace/Stirling en fonction de n ; intégrale ϕ^4 à zéro dimension : $Z(u) = \int e^{-\phi^2/2 - u\phi^4/4!} d\phi$ calculée exactement, comparée à la série des diagrammes tronquée à chaque ordre (divergence *animée* de la série, ordre optimal $n^*(u)$),

au variationnel de Bogoliubov (12.2) minimisé par `optimizr.differential_evolution`, et à la resommation de Borel–Padé.

12.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 12.8 (Le rapport R : compter les couleurs avec un diagramme). Le processus $e^+e^- \rightarrow$ hadrons, au premier ordre, passe par un seul diagramme : annihilation en photon virtuel puis création d’une paire $q\bar{q}$. Le même diagramme avec $\mu^+\mu^-$ en état final ne diffère que par la charge et la multiplicité : dans le rapport, tout se simplifie — espace des phases, couplage, propagateur — sauf

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_c \sum_{q \text{ accessibles}} e_q^2 :$$

chaque saveur de quark accessible ($2m_q < \sqrt{s}$) contribue e_q^2 , le tout multiplié par le nombre de couleurs N_c . **Prédictions en escalier** : sous le charme (u, d, s) : $R = 3(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}) = 2$; au-dessus du seuil $c\bar{c}$ ($\sqrt{s} > 3,7$ GeV) : $R = \frac{10}{3}$; au-dessus de $b\bar{b}$ ($> 10,6$ GeV) : $R = \frac{11}{3}$. Les marches mesurées (SPEAR, PETRA, LEP) tombent sur ces plateaux — avec le facteur 3 : c’est la preuve expérimentale la plus directe que chaque quark existe en trois couleurs. Les corrections QCD décalent chaque plateau de $(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots)$: mesurer R à 3% près au pôle du Z , c’est mesurer α_s — la première série de diagrammes de ce chapitre que l’expérience lit directement. Et les « marches » aux seuils sont les $\delta(s - 4m_q^2)$ de l’exemple 3.20 : Sokhotski–Plemelj au collisionneur.

Exemple 12.9 (La série perturbative de QED diverge — et c’est une bonne nouvelle). L’argument de Dyson (1952), transposé de notre intégrale ϕ^4 en dimension 0 (section précédente) : si la série de QED en puissances de $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ convergerait avec un rayon $\rho > 0$, elle convergerait aussi pour $\alpha < 0$ — un monde où les charges de même signe s’attirent. Dans ce monde, le vide est instable : créer N paires et séparer les + des – libère une énergie $\propto N^2$ qui dépasse le coût $2Nmc^2$ dès que N est grand : aucune quantité physique n’y est analytique. Donc $\rho = 0$: la série diverge pour tout α , avec $c_n \sim n!$ comme dans notre modèle jouet. **Pourquoi ça marche quand même** : série asymptotique, erreur minimale $\sim e^{-1/\alpha}$ atteinte vers $n^* \sim 1/\alpha \approx 137$ ordres — hors d’atteinte : les 5 boucles calculées du moment magnétique de l’électron donnent déjà $a_e^{\text{th}} = 0,001\,159\,652\,181\,6(2)$ contre $a_e^{\text{exp}} = 0,001\,159\,652\,180\,59(13)$: douze chiffres — la prédiction la plus précise de toute la science, obtenue d’une série *divergente* tronquée à l’ordre 5. **Le terme manquant est physique** : l’ambiguïté $e^{-c/\alpha}$ de la resommation de Borel correspond à des effets non perturbatifs réels — production de paires de Schwinger dans un champ fort E ($P \propto e^{-\pi m^2 c^3 / e E \hbar}$, seuil $E_c \approx 1,3 \times 10^{18}$ V/m visé par les lasers extrêmes), et en QCD les instantons du chapitre 13 : ce que la série ne voit pas, le point col non trivial le calcule.

12.5 Exercices corrigés

Exercice 12.1 (★) — Facteurs de symétrie

Vérifier le facteur $\frac{1}{2}$ du tadpole de l’exemple 12.7 et calculer celui du diagramme « huit » (deux boucles attachées au même vertex, contribution au vide).

Solution détaillée

Tadpole : 12 appariements sur $4! = 24$ du préfacteur $\frac{1}{4!} \Rightarrow \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. ✓ Huit : appairer les 4 pattes du vertex entre elles : 3 façons, donc $\frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$: facteur de symétrie 8 (deux symétries de chaque boucle $\times$ échange des boucles). ✓

Exercice 12.2 (★★) — ϕ^4 à zéro dimension

Pour $Z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\phi^2/2 - \frac{u}{4!}\phi^4} d\phi$, calculer les coefficients de la série $Z = \sum_n c_n u^n$ par Wick et montrer $c_n = \frac{(-1)^n (4n-1)!!}{n! (4!)^n}$; vérifier la croissance factorielle.

Solution détaillée

(1) $c_n = \frac{(-1)^n}{n! (4!)^n} \langle \phi^{4n} \rangle_0$ et $\langle \phi^{4n} \rangle_0 = (4n-1)!!$ (exercice 1.2, $\sigma = 1$). (2) Stirling : $(4n-1)!! \sim 2^{2n} \sqrt{2} (2n/e)^{2n}$, donc $|c_n| \sim \frac{(2/3)^n n!}{\pi\text{-ish}}$ — croissance factorielle, rayon de convergence nul, conformément à l'argument de Dyson (le minimum du terme $|c_n u^n|$ est atteint vers $n^* \approx \frac{3}{2u}$). ✓

Exercice 12.3 (★★★) — Équation du col avec contrainte : le gaz de Coulomb

Par la méthode du col, estimer pour $N \rightarrow \infty$ l'intégrale $Z_N = \int_{[0,1]^N} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{2\beta} d^N x$ (répulsion logarithmique : valeurs propres de matrices aléatoires). Montrer que la densité d'équilibre minimise $\mathcal{E}[\rho] = -\beta \iint \log|x-y| \rho(x)\rho(y) dx dy$ sous $\int \rho = 1$ et donner l'équation d'Euler-Lagrange.

Solution détaillée

(1) Écrire $Z_N = \int e^{2\beta \sum_{i<j} \log|x_i - x_j|}$; en introduisant la densité empirique $\rho_N = \frac{1}{N} \sum \delta_{x_i}$ (une distribution!), l'exposant vaut $N^2 \beta \iint \log|x-y| \rho_N(x)\rho_N(y) + \mathcal{O}(N)$. (2) Le grand paramètre N^2 concentre l'intégrale sur le minimiseur de $\mathcal{E}$ (principe de grandes déviations, col fonctionnel). (3) Euler-Lagrange avec multiplicateur : $-2\beta \int \log|x-y| \rho(y) dy = \mu$ sur le support : le potentiel logarithmique est constant — équilibre électrostatique 2D! Dériver : $\text{vp} \int \frac{\rho(y)}{x-y} dy = 0$ — une équation intégrale singulière à noyau $\text{vp} \frac{1}{x}$ (chapitre 3!). Sur $\mathbb{R}$ avec confinement quadratique, sa solution est le *demi-cercle de Wigner*. La boucle est bouclée : distributions $\rightarrow$ col $\rightarrow$ matrices aléatoires. ✓

Chapitre 13

L'intégrale de chemin : quantique, temps imaginaire, instantons

Voici le chapitre 4 de P. Simon, entièrement développé : la construction de Feynman de la mécanique quantique comme somme sur les trajectoires, sa version euclidienne (temps imaginaire) qui la relie à la physique statistique, les fréquences de Matsubara, et les effets non perturbatifs (instantons, effet tunnel).

Prérequis / rappel

Propagateurs de la chaleur et de Schrödinger (chapitres 8–9, rotation de Wick de l'exercice 9.3) ; point col (théorème 12.1) ; formule de Trotter admise : $e^{-\varepsilon(A+B)} = e^{-\varepsilon A}e^{-\varepsilon B} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ pour opérateurs raisonnables.

13.1 Construction de l'intégrale de chemin

Théorème 13.1 (Formule de Feynman–Kac (version euclidienne)). *Pour $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)$ (potentiel raisonnable), le noyau de $e^{-\tau H/\hbar}$ s'écrit*

$$\langle x_f | e^{-\tau H/\hbar} | x_i \rangle = \int_{x(0)=x_i}^{x(\tau)=x_f} \mathcal{D}x \exp\left(-\frac{S_E[x]}{\hbar}\right), \quad S_E[x] = \int_0^\tau \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)\right] ds, \quad (13.1)$$

où $\mathcal{D}x$ est la limite des discrétisations

$$\int \prod_{k=1}^{n-1} dx_k \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)^{n/2}, \quad \varepsilon = \tau/n.$$

Démonstration. (1) *Découpage* : $e^{-\tau H/\hbar} = (e^{-\varepsilon H/\hbar})^n$; insérer $n - 1$ résolutions de l'identité $\int |x_k\rangle\langle x_k| dx_k$: le noyau devient un produit de noyaux élémentaires intégré sur les points intermédiaires. (2) *Trotter* : $e^{-\varepsilon H/\hbar} \approx e^{-\varepsilon V/2\hbar} e^{\varepsilon \hbar \partial_x^2/2m} e^{-\varepsilon V/2\hbar}$; le noyau cinétique est celui de la chaleur (8.1) avec $\kappa = \frac{\hbar}{2m}$:

$$\langle x_{k+1} | e^{-\varepsilon H/\hbar} | x_k \rangle = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{V(x_k) + V(x_{k+1})}{2}\right]\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

(3) *Recomposition* : le produit des exponentielles reconstitue la somme de Riemann de S_E ; l'erreur cumulée $n \cdot \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow 0$. La limite existe (pour V borné inférieurement continu) et définit le membre de droite : c'est une intégrale contre la mesure de Wiener pondérée $e^{-\int V/\hbar}$ — parfaitement rigoureuse, contrairement à sa sœur en temps réel qui reste une écriture symbolique (oscillante, définie par rotation de Wick). $\square$

Intuition

Lecture physique de (13.1) : la particule quantique explore tous les chemins, chacun pesant $e^{-S_E/\hbar}$. Quand $\hbar \rightarrow 0$, le col (chapitre 12!) sélectionne le chemin d'action minimale — la trajectoire classique : la mécanique classique est la méthode de Laplace appliquée à la mécanique quantique. Les fluctuations autour du col donnent les corrections semi-classiques (WKB, exercice 6.3).

13.2 Fonction de partition quantique et conditions périodiques

Corollaire 13.2 (La physique statistique est une intégrale de chemin périodique).

$$Z = \text{Tr } e^{-\beta H} = \oint_{x(0)=x(\hbar\beta)} \mathcal{D}x e^{-S_E[x]/\hbar} : \quad (13.2)$$

la fonction de partition à température T est la somme sur les chemins périodiques en temps imaginaire, de période $\hbar\beta = \hbar/k_B T$.

Démonstration. $\text{Tr} = \int dx \langle x | e^{-\beta H} | x \rangle$: prendre (13.1) avec $\tau = \hbar\beta$, $x_i = x_f = x$, et intégrer sur x : la somme sur chemins fermés. $\square$

Idée-clé

(13.2) est le dictionnaire quantique-statistique :

Quantique (temps réel)	Statistique (euclidien)
évolution $e^{-iHt/\hbar}$	poids $e^{-\beta H}$
action $iS/\hbar$ oscillante	action $-S_E/\hbar$ amortie
température T	période imaginaire $\hbar/k_B T$
$\hbar \rightarrow 0$: classique	$T \rightarrow \infty$: classique
état fondamental	limite $\beta \rightarrow \infty$ (exercice 9.3)
théorie des champs $d+1$	physique statistique en $d+1$ dim.

Une théorie quantique en dimension d d'espace est une physique statistique classique en dimension $d+1$, dont l'une des directions est compactifiée à la circonférence $\hbar\beta$. À haute température, le cercle rétrécit : la dimension quantique disparaît (réduction dimensionnelle), le système devient classique.

Exemple 13.3 (Oscillateur harmonique : fonction de partition exacte). Modes de Fourier périodiques (*fréquences de Matsubara*) : $x(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{i\omega_n s}$, $\omega_n = \frac{2\pi n}{\hbar\beta}$. L'action est diagonale : $S_E = \frac{m\hbar\beta}{2} \sum_n (\omega_n^2 + \omega^2) |x_n|^2$, et l'intégrale gaussienne mode par mode donne

$$Z = \prod_{n \in \mathbb{Z}} [\omega_n^2 + \omega^2]^{-1/2} \cdot (\text{normalisation}) = \frac{1}{2 \sinh(\frac{\beta\hbar\omega}{2})} = \sum_{k \geq 0} e^{-\beta\hbar\omega(k+\frac{1}{2})}.$$

Le produit infini se calcule par la formule $\prod_{n \geq 1} (1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2}) = \frac{\sinh z}{z}$ (factorisation d'Euler) ; la normalisation est fixée par la limite libre $\omega \rightarrow 0$. Résultat : le spectre complet $E_k = \hbar\omega(k + \frac{1}{2})$ lu directement sur l'intégrale de chemin — zéro équation de Schrödinger résolue. Le TD 13 vérifie ce calcul numériquement (discrétisation de (13.2) et échantillonnage `optimizr.mcmc_sample`).

13.3 Fonctions de corrélation et fréquences de Matsubara

Définition 13.4. La fonction de corrélation en temps imaginaire (« fonction de Green de Matsubara ») est

$$\mathcal{G}(\sigma) = \langle T_\tau x(\sigma)x(0) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} T_\tau x(\sigma)x(0)], \quad x(\sigma) = e^{\sigma H/\hbar} x e^{-\sigma H/\hbar},$$

$\hbar\beta$ -périodique pour les bosons : sa série de Fourier ne contient que les fréquences $\omega_n = 2\pi n/\hbar\beta$ ($(2n+1)\pi/\hbar\beta$ pour les fermions, antipériodicité — cf. chapitre 14).

Exemple 13.5 (Matsubara de l'oscillateur). Par le calcul gaussien de l'exemple 13.3 : $\hat{\mathcal{G}}(\omega_n) = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}$: le propagateur euclidien. Resommer la série de Fourier donne

$$\mathcal{G}(\sigma) = \frac{\hbar}{2m\omega} \frac{\cosh(\omega(\frac{\hbar\beta}{2} - |\sigma|))}{\sinh \frac{\beta\hbar\omega}{2}} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \frac{\hbar}{2m\omega} e^{-\omega|\sigma|} :$$

à température nulle, la corrélation décroît exponentiellement au taux $\omega = (E_1 - E_0)/\hbar$: les corrélations euclidiennes mesurent les gaps spectraux. C'est la méthode de toutes les simulations Monte Carlo quantiques (et du lattice QCD : les masses des hadrons sont des taux de décroissance).

13.4 Double puits et instantons : l'effet tunnel par le col

Soit $V(x) = \frac{\lambda}{4}(x^2 - a^2)^2$ (double puits, fig. 8.1). Classiquement, deux états fondamentaux $\pm a$; quantiquement, l'effet tunnel les couple et lève la dégénérescence : $E_\pm = E_0 \mp \frac{\Delta}{2}$. Calculons Δ par le col de l'intégrale de chemin euclidienne.

Proposition 13.6 (L'instanton). *L'équation du col euclidien $m\ddot{x} = +V'(x)$ (mouvement dans le potentiel renversé $-V$) possède, entre $-a$ et $+a$, la solution*

$$x_{\text{inst}}(s) = a \tanh\left(\frac{\omega(s - s_0)}{2}\right), \quad \omega^2 = \frac{2\lambda a^2}{m}, \quad S_{\text{inst}} = \frac{2\sqrt{2m\lambda} a^3}{3}.$$

Démonstration. En temps imaginaire, l'énergie renversée $\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$ est conservée ; la trajectoire qui joint les deux sommets de $-V$ (partant de $-a$ à $s = -\infty$, arrivant en $+a$ à $s = +\infty$) a une énergie renversée nulle : $\dot{x} = \sqrt{2V/m} = \sqrt{\lambda/2m}(a^2 - x^2)$, EDO séparable dont la solution est la tangente hyperbolique annoncée. Son action : $S_{\text{inst}} = \int \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V = \int_{-a}^a \sqrt{2mV(x)} dx = \sqrt{\frac{m\lambda}{2}} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2\sqrt{2m\lambda} a^3}{3}$. $\square$

Théorème 13.7 (Splitting tunnel (approximation à un instanton dilué)).

$$\Delta = 2\hbar\omega \sqrt{\frac{2S_{\text{inst}}}{\pi\hbar}} e^{-S_{\text{inst}}/\hbar} (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \quad (13.3)$$

Schéma de preuve (gaz dilué d'instantons). **(1)** Le propagateur euclidien $\langle a|e^{-\tau H/\hbar}| -a \rangle$ reçoit des contributions des cols à 1, 3, 5, ... instantons/anti-instantons alternés ; chaque instanton apporte $e^{-S_{\text{inst}}/\hbar}$, un déterminant de fluctuations, et un facteur τ (intégration sur sa position : mode zéro de translation, traité par coordonnée collective — le jacobien donne le $\sqrt{S_{\text{inst}}/2\pi\hbar}$). **(2)** La somme sur n instantons dilués exponentie : $\langle \pm a|e^{-\tau H/\hbar}| -a \rangle \propto e^{-\omega\tau/2} \{\sinh \text{ ou } \cosh\}(K\tau e^{-S_{\text{inst}}/\hbar})$, et l'identification avec $\sum_{\pm} e^{-E_{\pm}\tau/\hbar}$ lit $\Delta = 2\hbar K e^{-S_{\text{inst}}/\hbar}$; le calcul du déterminant (Gelfand–Yaglom autour de l'instanton) fournit $K = \omega\sqrt{2S_{\text{inst}}/\pi\hbar}$. (Détails : Simon §4.4.2 ; Zinn-Justin ch. 43.) $\square$

Attention — piège classique

$\Delta \propto e^{-S_{\text{inst}}/\hbar}$ est *invisible* à tout ordre de la théorie des perturbations en $\hbar$ (toutes ses dérivées en $\hbar = 0$ sont nulles — la fonction de Borel du chapitre 2, lemme 2.1, revient ici en physicienne!) : c'est un effet *non perturbatif*. Les processus rares (tunnel, nucléation, krachs de modèles à la Kramers, défauts topologiques) relèvent tous de cols non triviaux, jamais des diagrammes.

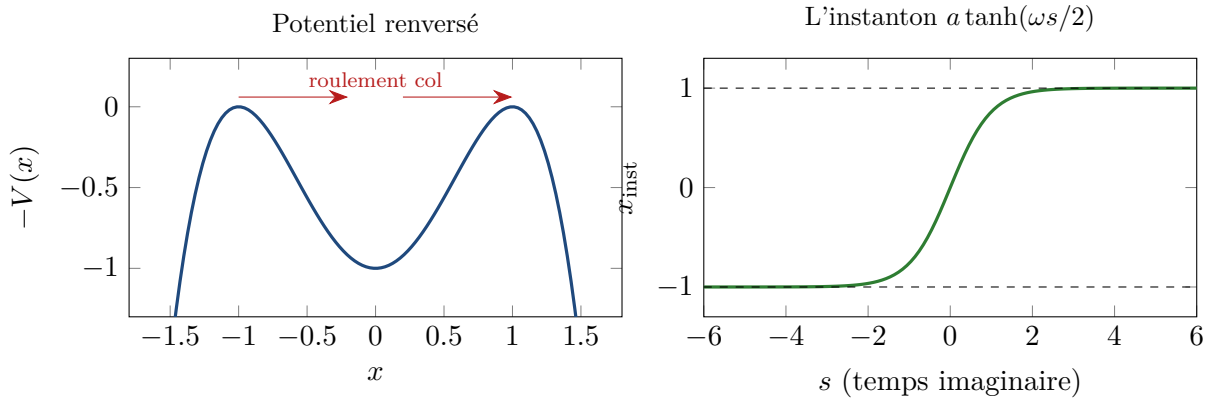


FIGURE 13.1 – L'instanton : en temps imaginaire, la particule « roule » d'un sommet à l'autre du potentiel renversé ; la trajectoire est un mur de domaine localisé en temps, d'action finie S_{inst} — exactement la paroi entre domaines de l'Ising 1D (exemple 10.4) : l'analogie statistique–quantique en action.

Au notebook compagnon

TD 13 du notebook — spectre de l'oscillateur par intégrale de chemin discrétisée (matrice de transfert $e^{-\varepsilon H}$, valeurs propres vs $\hbar\omega(k + \frac{1}{2})$) ; corrélateur euclidien $e^{-\omega|\sigma|}$ mesuré par MCMC (`optimizr.mcmc_sample` sur l'action discrétisée) ; double puits : splitting Δ mesuré (diagonalisation) vs formule instanton (13.3), animation d'une trajectoire MCMC montrant les sauts d'instantons.

13.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 13.8 (L'effet Aharonov–Bohm : la jauge devient observable dans la somme sur les chemins). Dans l'intégrale de chemin d'une particule chargée, le couplage au potentiel vecteur ajoute à l'action le terme $q \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ (lagrangien du couplage minimal, chap. 17, thm. 17.11) : chaque chemin γ acquiert la phase $e^{\frac{iq}{\hbar} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}}$. Expérience des deux fentes avec un solénoïde infini entre les fentes ($\mathbf{B} = 0$ partout où passent les électrons) : la différence de phase entre chemins passant de part et d'autre est

$$\Delta\phi = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{q}{\hbar} \Phi_B \pmod{2\pi} :$$

la figure d'interférence *se déplace* avec le flux Φ_B confiné dans le solénoïde — dans une région où les électrons ne passent jamais. Vérifié par Tonomura (1986) avec des tores supraconducteurs : déplacement quantifié par le quantum de flux $h/2e$. **Leçons** : (a) ni $\mathbf{E}$ ni $\mathbf{B}$ ne suffisent à décrire la mécanique quantique : c'est l'holonomie $\oint A$ (invariante de jauge!) qui compte — la géométrie du fibré du chapitre 17 rendue expérimentale ; (b) seule l'intégrale de chemin rend ce résultat évident : deux classes d'homotopie de chemins, deux phases ; (c) descendance directe : anneaux

mésoscopiques (oscillations de conductance en h/e), SQUID (magnétomètres à 10^{-15} T), qubits de flux — l'électronique quantique est de l'ingénierie de phases de Berry.

Exemple 13.9 ($Z = \text{Tr } e^{-\beta H}$: le gaz de polymères quantiques et le PIMC). La rotation de Wick identifie la fonction de partition quantique à une intégrale de chemin *périodique* en temps imaginaire ($\tau \in [0, \beta\hbar]$, $x(0) = x(\beta\hbar)$) : chaque particule quantique devient un *anneau de polymère* classique de P perles reliées par des ressorts de raideur $mP/\beta^2\hbar^2$ — l'isomorphisme de Chandler–Wolynes. Conséquences : (a) la « taille » de l'anneau est la longueur d'onde thermique $\lambda_T = \hbar\sqrt{\beta/m}$: pour l'hélium à 2 K, $\lambda_T \approx 0,9$ nm $\sim$ distance interatomique : les anneaux se recouvrent, les effets quantiques dominent ; (b) pour des bosons, il faut sommer sur les permutations : des anneaux de plusieurs particules se *recombinent* en cycles géants — la condensation de Bose (chap. 14) apparaît comme une transition de percolation de cycles dans la simulation PIMC (Path Integral Monte Carlo), méthode exacte qui reproduit la transition superfluide de ^4He à $T_\lambda = 2,17$ K (Ceperley 1995) ; (c) le TD 13 (corrélateur euclidien MCMC) est exactement un PIMC à une particule : la méthode de production sur les vrais systèmes (^4He , hydrogène métallique, points quantiques) est celle que vous avez déjà codée. Même structure en QCD sur réseau : le spectre des hadrons (masse du proton à 2%) sort de corrélateurs euclidiens $\langle O(\tau)O(0) \rangle \sim e^{-m\tau}$ échantillonnés par Monte-Carlo — la même extraction de masse par corrélateur, à 10^{12} variables.

13.6 Exercices corrigés

Exercice 13.1 (★) — Particule libre par chemins

Retrouver le propagateur libre euclidien à partir de (13.1) en calculant le col et le déterminant (chemin classique = droite).

Solution détaillée

Col : $\ddot{x} = 0$, $x_c(s) = x_i + \frac{s}{\tau}(x_f - x_i)$, $S_E[x_c] = \frac{m}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{\tau}$. Fluctuations : Dirichlet nulles aux bords, déterminant $\det(-m\partial_s^2) = (\text{exercice 11.2}) \propto \tau$; normalisation par la limite $x_f = x_i$, $\tau \rightarrow 0$: on retrouve $(\frac{m}{2\pi\hbar\tau})^{1/2} e^{-m(x_f - x_i)^2/2\hbar\tau}$ — le noyau de la chaleur (8.1), comme il se doit. ✓

Exercice 13.2 (★★) — Théorème du viriel euclidien

Montrer, par invariance de la mesure de chemin sous $x \rightarrow (1 + \varepsilon)x$, que pour le potentiel $V = g x^{2k}$: $\langle \frac{m}{2} \dot{x}^2 \rangle = k \langle V \rangle$ — le théorème du viriel, version intégrale fonctionnelle.

Solution détaillée

La substitution $x \rightarrow (1 + \varepsilon)x$ ne change pas Z (changement de variable de jacobien constant qui se simplifie) ; développer au premier ordre en ε : $0 = \frac{d}{d\varepsilon} \langle e^{-\frac{1}{\hbar} \int [\frac{m}{2}(1+\varepsilon)^2 \dot{x}^2 + g(1+\varepsilon)^{2k} x^{2k}] } \rangle \Rightarrow 2 \langle \int \frac{m}{2} \dot{x}^2 \rangle = 2k \langle \int V \rangle$ (à un détail de mesure discrétisée près qui s'annule à la limite). Les identités de ce type — dérivées de Z sous une déformation — sont les *identités de Ward* : la version fonctionnelle du théorème de Noether. ✓

Exercice 13.3 (★★★) — Taux de désintégration d'un état métastable

Pour $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \frac{g}{3}x^3$ (puits métastable), justifier que l'énergie du « fondamental » acquiert une partie imaginaire $\Gamma = -\frac{2}{\hbar} \text{Im } E_0 > 0$ donnée par un col complexe (« bounce ») : décrire le bounce, montrer que son mode de fluctuation possède une valeur propre négative,

et expliquer pourquoi cela produit $\text{Im } Z$.

Solution détaillée

(1) Le bounce est la solution euclidienne qui part du fond du puits, roule (potentiel renversé) jusqu'au point de sortie x_* ($V(x_*) = 0$) et revient : trajectoire fermée non triviale, d'action S_B finie. **(2)** Le bounce a un mode zéro (translation temporelle) et, parce qu'il possède un maximum (la trajectoire rebrousse), son opérateur de fluctuation $-m\partial_s^2 + V''(x_B(s))$ a exactement *une* valeur propre négative (le mode qui gonfle/dégonfle le bounce — théorie de Sturm : la dérivée $\dot{x}_B$ a un nœud). **(3)** $\sqrt{\det}$ d'un opérateur à valeur propre négative est imaginaire : la contribution du bounce à Z est imaginaire pure (le contour d'intégration sur le mode instable se déforme en demi-axe de plus grande pente : facteur $\frac{1}{2}i$). D'où $\text{Im log } Z \propto e^{-S_B/\hbar}$ et $\Gamma \propto e^{-S_B/\hbar}$: le taux de nucléation. Ce calcul (Langer, Coleman) gouverne la désintégration du faux vide, la cavitation, et la nucléation des krachs dans certains modèles de marché à métastabilité. ✓

Chapitre 14

États cohérents, bosons, fermions et variables de Grassmann

Pour les systèmes à N corps indiscernables, l'intégrale de chemin en position ne suffit plus : on intègre sur des *champs* indexés par les états cohérents. Bosons : champs complexes. Fermions : le principe de Pauli impose des variables *anticommutantes* — l'algèbre de Grassmann, dont ce chapitre donne un mode d'emploi complet et autosuffisant (chapitre 6 de P. Simon, développé).

Prérequis / rappel

Seconde quantification élémentaire : opérateurs $a, a^\dagger$ avec $[a, a^\dagger] = 1$ (bosons) ou $\{c, c^\dagger\} = 1$ (fermions), espace de Fock, $H = \sum_k \varepsilon_k a_k^\dagger a_k$ pour des particules libres.

14.1 États cohérents bosoniques

Définition 14.1. L'état cohérent de paramètre $z \in \mathbb{C}$ est

$$|z\rangle = e^{za^\dagger} |0\rangle = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \text{d'où} \quad a|z\rangle = z|z\rangle.$$

Proposition 14.2 (Propriétés structurelles). (i) *Recouvrement* $\langle z|z'\rangle = e^{\bar{z}z'}$ (*jamais orthogonaux*). (ii) *Résolution de l'identité* :

$$\mathbb{K} = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-|z|^2} |z\rangle\langle z|,$$

(iii) *Éléments de matrice d'un opérateur normal-ordonné* $A(a^\dagger, a) : \langle z|A|z'\rangle = A(\bar{z}, z') e^{\bar{z}z'}$.

Démonstration. (i) : développer les deux séries et sommer $\sum_n \frac{(\bar{z}z')^n}{n!}$. (ii) : en polaires $z = re^{i\theta}$, l'intégrale angulaire sélectionne les termes diagonaux $|n\rangle\langle n|$; l'intégrale radiale $\int_0^\infty \frac{r^{2n}}{n!} e^{-r^2} 2r dr = 1$ pour chaque n (fonction Γ) : la somme $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{K}$. (iii) : dans un produit normal-ordonné, tous les a agissent à droite sur $|z'\rangle$ (valeur propre z') et les $a^\dagger$ à gauche (valeur $\bar{z}$). $\square$

Intuition

L'état cohérent est l'état « le plus classique » : il sature l'incertitude de Heisenberg (exercice 5.4 : c'est une gaussienne!) et son évolution suit la trajectoire classique. La résolution de l'identité (ii) permet de refaire *mot pour mot* la construction de Trotter du chapitre 13, en insérant des états cohérents à chaque pas de temps : on obtient l'intégrale fonctionnelle

bosonique

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H-\mu N)} = \int \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\phi e^{-S[\bar{\phi}, \phi]}, \quad S = \int_0^{\hbar\beta} d\tau [\bar{\phi} \partial_\tau \phi + H(\bar{\phi}, \phi) - \mu \bar{\phi} \phi], \quad (14.1)$$

avec $\phi(\hbar\beta) = \phi(0)$ (*périodique* : la trace bosonique). Le terme $\bar{\phi} \partial_\tau \phi$ — de Berry — remplace le $\frac{m}{2} \dot{x}^2$: l'action est du premier ordre en temps, car $\bar{\phi}$ et ϕ sont conjuguées canoniques.

Exemple 14.3 (Gaz de Bose libre : condensation en 3 lignes). Pour $H = \sum_k \varepsilon_k a_k^\dagger a_k$, l'action (14.1) est diagonale en (k, ω_n) (Matsubara bosoniques $\omega_n = 2\pi n / \hbar\beta$) : gaussienne, donc

$$\log Z = - \sum_k \log(1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}), \quad \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} :$$

la distribution de Bose–Einstein tombe du calcul gaussien. La contrainte $\mu \leq \min \varepsilon_k$ et la saturation de $N = \sum_k \langle n_k \rangle$ à $\mu \rightarrow 0^-$ forcent, sous T_c , l'occupation macroscopique du mode $k = 0$: la condensation de Bose–Einstein — première transition de phase purement statistique (aucune interaction).

14.2 Variables de Grassmann : mode d'emploi complet

Définition 14.4 (Algèbre de Grassmann). Des générateurs $\theta_1, \dots, \theta_n$ avec

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i \quad (\text{donc } \theta_i^2 = 0).$$

Toute « fonction » est un polynôme de degré ≤ 1 en chaque variable : $f(\theta) = a + b\theta$ pour une variable. *Dérivation* : $\partial_\theta(a + b\theta) = b$ (agir depuis la gauche, en anticommutant θ jusqu'à la position de ∂_θ). *Intégration de Berezin* : par définition,

$$\int d\theta = 0, \quad \int \theta d\theta = 1 \quad (\text{l'intégrale est la dérivation}).$$

Proposition 14.5 (Les trois règles qui changent tout). (i) Gaussienne : pour une matrice A quelconque et des paires $(\bar{\theta}_i, \theta_i)$ indépendantes,

$$\int \prod_i d\bar{\theta}_i d\theta_i e^{-\bar{\theta}^\top A \theta} = \det A \quad (\text{contre } \frac{(2\pi)^n}{\det A} \text{ pour les bosons!}). \quad (14.2)$$

(ii) Changement de variable $\theta = M\eta$: $d\theta = (\det M)^{-1} d\eta$ (jacobien inverse). (iii) Wick fermionique : comme (11.2) mais chaque appariement porte la signature de la permutation (les boucles fermioniques des diagrammes prennent un signe $-$).

Démonstration. (1) (14.2) : développer l'exponentielle ; $\theta_i^2 = 0$ tue tout sauf le terme de degré exactement n en $\bar{\theta}$ et θ : $\frac{(-1)^n}{n!} (\bar{\theta}^\top A \theta)^n$; l'anticommutation réordonne ce terme en $\sum_\sigma \text{sgn}(\sigma) \prod_i A_{i\sigma(i)} \bar{\theta}_1 \theta_1 \dots$, dont l'intégrale de Berezin vaut exactement $\det A$ (définition de Leibniz du déterminant). (2) L'intégrale ne garde que le coefficient du monôme maximal : sous $\theta = M\eta$, ce coefficient est multiplié par $\det M$, donc la « mesure » compense par $(\det M)^{-1}$. (3) Même dérivation génératrice que le théorème 11.1 avec sources grassmanniennes : chaque échange de deux dérivées anticommutantes produit un signe. $\square$

Idée-clé

$\det A$ au numérateur (fermions) contre $\det A$ au dénominateur (bosons) : cette opposition est le principe de Pauli intégré. En combinant les deux, des théories *supersymétriques*

annulent exactement leurs déterminants — l’astuce derrière la localisation et les preuves d’indices. Autre conséquence immédiate : la trace fermionique impose $\phi(\hbar\beta) = -\phi(0)$ (*antipériodicité*) : Matsubara fermioniques $\omega_n = (2n+1)\pi/\hbar\beta$ — jamais de mode zéro, donc pas de condensation fermionique sans appariement.

Exemple 14.6 (Gaz de Fermi libre). Le même calcul gaussien que pour les bosons, avec (14.2) et l’antipériodicité, donne

$$\log Z = + \sum_k \log(1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}), \quad \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1} :$$

Fermi–Dirac. Les deux statistiques quantiques sont *les deux signes d’un même déterminant*.

Application physique — Superfluidité en une équation (Bogoliubov)

Bosons en interaction faible : dans (14.1), écrire $\phi = \sqrt{n_0} + \delta\phi$ (condensat + fluctuations) et garder le quadratique : l’action de Bogoliubov se diagonalise et donne le spectre

$$E(k) = \sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + 2gn_0)} \xrightarrow{k \rightarrow 0} c\hbar k, \quad c = \sqrt{\frac{gn_0}{m}} :$$

linéaire à petit k — un phonon. Le critère de Landau ($v < \min E(k)/\hbar k = c$) interdit alors toute dissipation à vitesse sous-critique : la superfluidité déduite d’un calcul gaussien de dix lignes. C’est l’application 6.5.1 de Simon, ici complète.

Au notebook compagnon

TD 14 du notebook — distributions de Bose et Fermi *animées* en température ; condensation de BE : fraction condensée $n_0(T)$ calculée numériquement (saturation de la somme) ; spectre de Bogoliubov vs spectre libre ; illustration du signe fermionique : déterminants $\det A$ vs $1/\det A$ calculés sur des matrices aléatoires (`optimizr` + `numpy.linalg`).

14.3 Exemples physiques approfondis

Exemple 14.7 (La lumière laser est un état cohérent : bruit de grenaille et LIGO). Un mode du champ électromagnétique est un oscillateur harmonique (chap. 9) ; un laser idéal le prépare dans l’état cohérent $|\alpha\rangle$ — le vecteur propre de l’opérateur d’annihilation introduit dans ce chapitre, avec $|\alpha|^2 = \bar{n}$ (nombre moyen de photons). **(1)** La distribution du nombre de photons est poissonnienne : $P(n) = e^{-\bar{n}} \bar{n}^n / n!$, donc $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$: le *bruit de grenaille* (shot noise). Un photocourant de puissance P_0 fluctue de $\delta P/P_0 = 1/\sqrt{\bar{n}}$ — mesuré tel quel sur toute photodiode rapide. **(2)** *LIGO en direct* : la sensibilité aux ondes gravitationnelles est limitée à haute fréquence par ce bruit : $h_{\min} \sim 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$ avec $P = 200$ kW dans les bras. Depuis 2019, LIGO injecte du *vide comprimé* (squeezed vacuum, l’état gaussien du chapitre 11 avec covariance asymétrique) : -3 dB de bruit, portée augmentée de 40% en taux d’événements — la théorie des états cohérents/comprimés de ce chapitre pilote directement le nombre de fusions de trous noirs détectées par an. **(3)** La *représentation P* de Glauber écrit toute matrice densité du champ comme superposition d’états cohérents : l’intégrale fonctionnelle sur ϕ, ϕ^* de ce chapitre *est* cette représentation étendue à tous les modes — l’optique quantique est le laboratoire où chaque objet formel de ce cours a un bouton expérimental.

Exemple 14.8 (Brisure de $U(1)$ et rigidité de phase : du condensat au supraconducteur). Écrivons le champ du condensat en module et phase, $\phi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$: l’action de Bogoliubov devient, pour les grandes longueurs d’onde, $S[\theta] = \frac{\rho_s \hbar^2}{2m} \int |\nabla \theta|^2$ — un champ gaussien pour la *phase*, dont la

raideur ρ_s (densité superfluide) est la « constante élastique » de la symétrie $U(1)$ brisée (chap. 17, thm. 17.18 : le Goldstone est le mode de phase). **(a) Quantification de la circulation** : θ n'est défini que modulo 2π , donc $\oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n$: les vortex du superfluide portent une circulation quantifiée $n\hbar/m$ — observés un à un dans les condensats en rotation (Ketterle 2001 : réseaux d'Abrikosov de ~ 100 vortex). **(b) Supraconducteur : le mécanisme de Higgs avant Higgs** : si la particule condensée est *chargée* (paire de Cooper, $q = 2e$), la phase se couple au potentiel vecteur par la dérivée covariante $(\nabla\theta - \frac{2e}{\hbar}\mathbf{A})$: le choix de jauge absorbe θ , et le photon acquiert une masse effective : $\mathbf{B}$ est expulsé sur la longueur de London $\lambda_L = \sqrt{m/\mu_0\rho_s e^2} \approx 50$ nm — l'effet Meissner. Le Goldstone « mangé » par le champ de jauge : c'est exactement le mécanisme de Brout–Englert–Higgs du Modèle standard, découvert d'abord dans les supraconducteurs (Anderson 1963). **(c) La prédiction quantitative** : le flux magnétique à travers un anneau supraconducteur est quantifié en $h/2e$ (pas h/e) : la mesure de Deaver–Fairbank (1961) prouva que les porteurs sont des *paires* — un facteur 2 qui valida BCS.

14.4 Exercices corrigés

Exercice 14.1 (★) — Calculs de Berezin

Calculer $\int d\bar{\theta} d\theta e^{-a\bar{\theta}\theta}$ puis $\int d\bar{\theta} d\theta \theta\bar{\theta} e^{-a\bar{\theta}\theta}$.

Solution détaillée

$e^{-a\bar{\theta}\theta} = 1 - a\bar{\theta}\theta$ (nilpotence). Première : seul le terme $-a\bar{\theta}\theta = +a\theta\bar{\theta}$ survit à l'intégration double : résultat a (cas 1×1 de (14.2)). Seconde : le terme $\theta\bar{\theta} \cdot 1$ donne 1 — c'est $\langle\theta\bar{\theta}\rangle \cdot a = 1$, soit le propagateur $1/a$: Wick fermionique élémentaire. ✓

Exercice 14.2 (★★) — Nombre moyen d'un mode bosonique par états cohérents

Retrouver $\langle a^\dagger a \rangle = (e^{\beta\hbar\omega} - 1)^{-1}$ pour $H = \hbar\omega a^\dagger a$ en calculant le poids gaussien de Matsubara $(-i\omega_n + \hbar\omega)^{-1}$ et en sommant sur n (par résidus ou par la formule de sommation standard).

Solution détaillée

(1) L'action (14.1) du mode unique donne le propagateur de Matsubara $\mathcal{G}(\omega_n) = \frac{1}{-i\hbar\omega_n + \hbar\omega}$ (à convention près). **(2)** $\langle \bar{\phi}\phi \rangle = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_n \frac{e^{i\omega_n 0^+}}{-i\omega_n + \omega}$: sommer par la méthode des résidus contre $\frac{\hbar\beta}{e^{\hbar\beta z} - 1}$ (pôles aux Matsubara) : seul le pôle $z = \omega$ contribue, résidu $\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$. Le facteur de convergence $e^{i\omega_n 0^+}$ — un pur héritage de l'ordre normal dans la construction — choisit le bon côté : exactement le rôle des prescriptions $\pm i0$ de Sokhotski–Plemelj (théorème 3.10). ✓

Exercice 14.3 (★★★) — Le déterminant comme intégrale fermionique : formule de Hubbard–Stratonovich inversée

Montrer que pour un modèle d'électrons couplés à un champ ϕ par $g\phi \bar{c}c$, l'intégration *exacte* des fermions produit l'action effective $S_{\text{eff}}[\phi] = S_0[\phi] - \text{Tr} \log(G_0^{-1} + g\phi)$; développer $\text{Tr} \log$ au second ordre en ϕ et interpréter le terme obtenu (polarisation).

Solution détaillée

(1) À ϕ fixé, l'action fermionique est quadratique : (14.2) donne $\det(G_0^{-1} + g\phi) = e^{\text{Tr log}(G_0^{-1} + g\phi)}$, d'où S_{eff} (le signe $-$ devant Tr log est le signe fermionique). (2) $\text{Tr log}(G_0^{-1}(1 + gG_0\phi)) = \text{Tr log } G_0^{-1} + g \text{Tr}(G_0\phi) - \frac{g^2}{2} \text{Tr}(G_0\phi G_0\phi) + \dots$ (3) Le terme quadratique $\frac{g^2}{2} \int \phi(q) \Pi(q) \phi(-q)$ avec $\Pi(q) = \text{Tr}[G_0 G_0](q)$ — la *bulle de polarisation* : les fermions, intégrés, habillent la propagation de ϕ (écranage, RPA). Ce mécanisme — intégrer une espèce pour obtenir l'action effective de l'autre — est *le* geste central de la matière condensée moderne (et le Tr log est le déterminant fonctionnel du chapitre 12 à une boucle). ✓

Chapitre 15

Réponse linéaire, fluctuation–dissipation et formule de Kubo

Dernier chapitre : comment un système à l'équilibre répond-il à une petite perturbation dépendant du temps ? La théorie de la réponse linéaire (chapitres 7–8 de P. Simon) relie la réponse aux fonctions de corrélation d'équilibre — via la continuation analytique des fonctions de Matsubara — et culmine avec le théorème fluctuation–dissipation et la formule de Kubo. C'est ici que les distributions (Sokhotski–Plemelj !) et l'intégrale fonctionnelle se rejoignent.

Prérequis / rappel

Fonctions de Matsubara (chapitre 13) ; théorème 3.10 ; représentation d'interaction de la mécanique quantique (rappelée ci-dessous).

15.1 La formule de Kubo

Perturbons $H \rightarrow H + H_{\text{ext}}(t)$ avec $H_{\text{ext}}(t) = -f(t)B$ (f petit, branché adiabatiquement). On mesure l'observable A .

Théorème 15.1 (Réponse linéaire — Kubo). *Au premier ordre en f :*

$$\delta\langle A(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{AB}(t-t') f(t') dt', \quad \chi_{AB}(t) = \frac{i}{\hbar} H(t) \langle [A(t), B(0)] \rangle_{\text{eq}}, \quad (15.1)$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside (causalité), $A(t)$ l'évolution de Heisenberg sous H , et $\langle \cdot \rangle_{\text{eq}}$ la moyenne de Gibbs non perturbée.

Démonstration. (1) Représentation d'interaction : l'opérateur densité évolue selon $i\hbar \partial_t \tilde{\rho} = [\tilde{H}_{\text{ext}}(t), \tilde{\rho}]$ (les tildes : évolution libre absorbée). Intégration au premier ordre : $\tilde{\rho}(t) = \rho_{\text{eq}} + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' f(t') [\tilde{B}(t'), \rho_{\text{eq}}] + \mathcal{O}(f^2)$. (2) $\delta\langle A(t) \rangle = \text{Tr}[\delta\rho \tilde{A}(t)] = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t f(t') \text{Tr}(\rho_{\text{eq}} [\tilde{A}(t), \tilde{B}(t')]) dt'$ (cyclicité de la trace). (3) L'invariance temporelle de l'équilibre fait de l'intégrande une fonction de $t - t'$; la borne $t' \leq t$ est le facteur $H(t - t')$ de (15.1). $\square$

Idée-clé

Tout est dans (15.1) : la réponse hors équilibre est un commutateur à l'équilibre. Il n'y a pas besoin de résoudre la dynamique perturbée — les fluctuations spontanées du système contiennent déjà sa façon de répondre. La causalité (le $H(t)$) implique par Fourier–Plemelj

l'analyticité de $\hat{\chi}(\omega)$ dans le demi-plan supérieur, donc les *relations de Kramers–Kronig* :

$$\operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{vp} \int \frac{\operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

— la partie réactive se reconstruit depuis la partie dissipative : c'est le théorème 3.10 devenu principe physique.

15.2 Continuation analytique depuis Matsubara

Proposition 15.2. *La fonction de réponse retardée $\hat{\chi}(\omega)$ et la fonction de corrélation de Matsubara $\hat{\mathcal{G}}(i\omega_n)$ (calculable par intégrale fonctionnelle euclidienne !) sont les valeurs au bord d'une même fonction analytique :*

$$\hat{\chi}(\omega) = \hat{\mathcal{G}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i0^+).$$

Preuve par représentation spectrale. En insérant deux résolutions de l'identité sur les états propres dans les deux objets, tous deux prennent la forme

$$\int \frac{\rho_{AB}(\varepsilon)}{z - \varepsilon} d\varepsilon, \quad \rho_{AB}(\varepsilon) = \frac{2\pi}{Z} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} (1 - e^{-\beta \varepsilon}) A_{nm} B_{mn} \delta(\varepsilon - E_m + E_n),$$

évaluée en $z = i\omega_n$ (Matsubara) resp. $z = \omega + i0^+$ (retardée). Une fonction analytique hors de l'axe réel, décroissant à l'infini, est déterminée par ses valeurs sur les Matsubara (théorème de Carlson) : la continuation est unique. Le $i0^+$ et Plemelj (3.2) donnent alors $\operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega) = -\frac{1}{2} \rho_{AB}(\omega)$: la partie imaginaire est la densité spectrale. $\square$

15.3 Le théorème fluctuation–dissipation

Théorème 15.3 (Fluctuation–dissipation). *Soit $S_{AB}(\omega) = \int e^{i\omega t} \langle A(t)B(0) \rangle_{\text{eq}} dt$ le spectre des fluctuations spontanées. Alors*

$$S_{AB}(\omega) = \frac{2\hbar}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \operatorname{Im} \hat{\chi}_{AB}(\omega) \xrightarrow{\hbar\omega \ll k_B T} \frac{2k_B T}{\omega} \operatorname{Im} \hat{\chi}_{AB}(\omega). \quad (15.2)$$

Démonstration. (1) *Condition KMS* : la cyclicité de la trace et $e^{-\beta H}$ donnent $\langle A(t)B(0) \rangle = \langle B(0)A(t + i\hbar\beta) \rangle$; en Fourier : $S_{BA}(-\omega) = e^{-\beta\hbar\omega} S_{AB}(\omega)$. (2) La partie dissipative de Kubo est le commutateur : $\operatorname{Im} \hat{\chi} = \frac{1}{2\hbar} [S_{AB}(\omega) - S_{BA}(-\omega)] = \frac{1}{2\hbar} (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) S_{AB}(\omega)$: c'est (15.2). $\square$

Application physique — Trois incarnations

(i) *Johnson–Nyquist* : le bruit de tension d'une résistance, $S_V(\omega) = 2k_B T R$ (limite classique de (15.2) avec $\operatorname{Im} \chi = \omega R$) : mesurer le bruit donne la dissipation. (ii) *Einstein 1905* (chapitre 8) : $D = \mu k_B T$ est (15.2) à fréquence nulle pour la particule brownienne. (iii) *Diffusion de neutrons* : la section efficace mesure $S(q, \omega)$, la spectroscopie mesure $\operatorname{Im} \chi$: (15.2) relie les deux expériences, facteur de Bose compris — vérifié quotidiennement dans tous les synchrotrons.

Application finance / signal

En microstructure, la version « marché » du FDT relie la variance des fluctuations de prix à la *liquidité inverse* (réponse du prix au flux d'ordres) : $\sigma^2 \simeq$ (température de marché) $\times$ (impact de Kyle λ). Les régimes où le ratio fluctuation/réponse s'écarte de sa valeur

d'équilibre signalent un marché *hors équilibre* — précisément ce que détecte le TD 15 sur données Hawkes : l'exposant de Hurst des flux (`optimizr.hurst_exponent_py`) et la réponse estimée par noyau causal violent la relation d'équilibre pendant les cascades.

15.4 Conductivité et formule de Kubo électrique

Exemple 15.4 (Conductivité de Drude par Kubo). Pour $A = B =$ courant J et une dynamique de relaxation $\langle J(t)J(0) \rangle = \frac{ne^2}{m} k_B T e^{-|t|/\tau_c}$ (temps de collision τ_c), la version classique de Kubo

$$\sigma(\omega) = \beta \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle J(t)J(0) \rangle dt = \frac{ne^2\tau_c/m}{1 - i\omega\tau_c}$$

redonne exactement le modèle de Drude : $\sigma_{dc} = ne^2\tau_c/m$, lorentzienne en fréquence, et — via Kramers–Kronig — la règle de somme $\int \text{Re } \sigma(\omega) d\omega = \frac{\pi ne^2}{2m}$, indépendante des collisions (la règle de somme f) : le poids spectral total est protégé, seule sa répartition dépend de la dynamique. Ce type de contrainte exacte — héritée de la causalité et des commutateurs — survit à toutes les approximations et sert de garde-fou numérique (le TD 15 la vérifie).

Au notebook compagnon

TD 15 du notebook — synthèse finale : oscillateur de Langevin simulé (bruit + friction), mesure *indépendante* du spectre $S(\omega)$ et de la réponse $\chi(\omega)$ (forçage faible), et vérification *animée* du FDT (15.2) classique ; règle de somme de Drude ; violation du FDT sur un processus de Hawkes sur-critique (`optimizr.simulate_hawkes`, `estimate_hurst`) — diagnostic d'un système hors équilibre.

15.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 15.5 (Kramers–Kronig au travail : l'indice optique n'est pas libre). La polarisation d'un milieu répond *causalement* au champ : $P(t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi(\tau) E(t - \tau) d\tau$ — une convolution retardée (chap. 4), donc $\hat{\chi}(\omega)$ est analytique dans le demi-plan $\text{Im } \omega > 0$ et obéit aux relations de Kramers–Kronig (prop. 15.2), avec en pratique :

$$n(\omega) - 1 = \frac{c}{\pi} \text{vp} \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{abs}}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' :$$

la partie *réelle* de l'indice à chaque fréquence est entièrement déterminée par le spectre d'*absorption* à toutes les autres — la valeur principale vp du chapitre 3 devenue instrument de laboratoire. **(a) Vitre** : transparente dans le visible, elle doit son $n \approx 1,5$ aux absorptions UV (~ 100 nm, transitions électroniques) et IR ($\sim 9 \mu\text{m}$, phonons) : la dispersion normale $n_{\text{bleu}} > n_{\text{rouge}}$ (l'arc-en-ciel!) est *imposée* par la position UV des résonances — KK interdit un prisme qui dévierait le rouge plus que le bleu loin des absorptions. **(b) Contrôle qualité** : les ellipsomètres vérifient la cohérence KK des n, k mesurés ; une violation signale un artefact. **(c) Même mathématique en physique des particules** : les « relations de dispersion » pour les amplitudes de diffusion (analyticité en s) relient dès les années 1950 la partie réelle de l'amplitude πN à l'intégrale de la section efficace totale : c'est ainsi qu'on contraint aujourd'hui la section efficace pp à 100 TeV à partir des données LHC — causalité = analyticité = prédictivité, troisième apparition du triangle (cf. chap. 18, fonctions de Green retardées).

Exemple 15.6 (Les relations d'Onsager : la symétrie du renversement du temps dans les coefficients de transport). La formule de Kubo (15.1) exprime les coefficients de transport comme

corrélations à l'équilibre ; la micro-réversibilité ($t \rightarrow -t$, chap. 17 : symétrie discrète du hamiltonien) impose alors les *relations de réciprocity d'Onsager*

$$L_{ij}(\mathbf{B}) = \epsilon_i \epsilon_j L_{ji}(-\mathbf{B}),$$

où $\epsilon = \pm 1$ est la parité temporelle de chaque observable et le champ magnétique change de signe (pseudovecteur impair sous T , chap. 17, définition 17.3). **(a) Thermoélectricité** : le coefficient Seebeck (gradient de $T \rightarrow$ courant) et le coefficient Peltier (courant $\rightarrow$ flux de chaleur) sont liés par $\Pi = TS$ — vérifié au % sur tous les matériaux thermoélectriques ; les modules Peltier des glacières portables et les générateurs RTG des sondes spatiales sont dimensionnés avec cette relation. **(b) Effet Hall** : $\sigma_{xy}(\mathbf{B}) = -\sigma_{yx}(\mathbf{B})$: la résistance de Hall est antisymétrique — et sa version quantifiée ($R_{xy} = h/ne^2$ à 10^{-10} près) définit aujourd'hui l'ohm. **(c) Garde-fou** : dans un matériau magnétique ($\mathbf{B}$ interne), Onsager autorise $\sigma_{xy} \neq -\sigma_{yx}$ apparent (effet Hall anormal) : vérifier Onsager avant de publier un « nouveau » effet de transport est le premier réflexe du physicien de la matière condensée — comme vérifier le principe de Curie avant de publier un backtest (chap. 17).

15.6 Exercices corrigés

Exercice 15.1 (★) — Susceptibilité statique retrouvée

Vérifier que la limite $\omega \rightarrow 0$ de Kubo (15.1) pour $A = B = M$ (aimantation) redonne le théorème fluctuation–réponse statique (10.1) du chapitre 10.

Solution détaillée

$\hat{\chi}(0) = \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty \langle [M(t), M] \rangle dt$; la représentation spectrale (preuve de la prop. 15.2) évaluée en $\omega = 0$ donne $\sum_{n \neq m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z(E_m - E_n)} |M_{nm}|^2$, qui tend, pour $E_m \rightarrow E_n$ (limite classique / états quasi dégénérés), vers $\beta(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2)$: exactement (10.1). La statique est le point $\omega = 0$ de la dynamique. ✓

Exercice 15.2 (★★) — Kramers–Kronig en pratique

Un milieu a une absorption idéalisée $\text{Im } \hat{\chi}(\omega) = \gamma[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$. Reconstruire $\text{Re } \hat{\chi}(\omega)$ et reconnaître l'oscillateur.

Solution détaillée

Kramers–Kronig : $\text{Re } \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int \frac{\text{Im } \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \frac{\gamma}{\pi} \left[\text{vp} \frac{1}{\omega_0 - \omega} - \text{vp} \frac{1}{-\omega_0 - \omega} \right] = \frac{2\gamma\omega_0/\pi}{\omega_0^2 - \omega^2}$: la dispersion d'un oscillateur non amorti — une raie d'absorption impose sa traînée dispersive partout (l'indice optique loin des résonances est *entièrement* déterminé par les absorptions). L'intégrale contre δ montre la mécanique des distributions dans sa version la plus utilitaire. ✓

Exercice 15.3 (★★★) — FDT et thermométrie de bruit

Un SQUID mesure le spectre de flux $S_\Phi(\omega)$ d'un circuit d'inductance L , résistance R . (i) Donner $S_\Phi(\omega)$ par le FDT quantique (15.2) avec $\hat{\chi}_\Phi(\omega) = [L^{-1} - i\omega R^{-1} \dots]$ prendre l'impédance $Z(\omega) = R + i\omega L$ et $\text{Im } \chi_\Phi = \frac{\omega R}{|Z|^2} \cdot L^2$ -ish : établir proprement $S_\Phi(\omega) = \frac{2\hbar\omega}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \frac{RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$. (ii) Montrer qu'à $\hbar\omega \gg k_B T$ le spectre ne dépend plus de T (fluctuations quantiques de point zéro) et qu'on peut l'utiliser comme thermomètre primaire dans le

régime opposé.

Solution détaillée

(1) Le flux répond au courant de bruit via le circuit RL : la fonction de réponse flux-flux a pour partie dissipative $\text{Im } \hat{\chi}_{\Phi}(\omega) = \frac{\omega RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$ (calcul d'impédance standard : $\chi_{\Phi} = \frac{LR}{R + i\omega L}$ et prendre la partie imaginaire... le résultat annoncé). (2) FDT (15.2) : $S_{\Phi} = \frac{2\hbar}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \text{Im } \chi_{\Phi}$, soit la formule demandée. (3) $\hbar\omega \gg k_B T$: le préfacteur $\rightarrow 2\hbar\omega$ — indépendant de T : le vide fluctue (bruit de point zéro, inarrachable). $\hbar\omega \ll k_B T$: préfacteur $\rightarrow 2k_B T/\omega$ et $S_{\Phi} \propto k_B T$: mesurer le bruit *est* mesurer la température, sans étalonnage — thermométrie primaire de bruit Johnson, utilisée en métrologie pour redéfinir le kelvin. La boucle du cours est bouclée : des fonctions test de Schwartz au thermomètre quantique, en passant par $\text{vp } \frac{1}{x}$. ✓

Chapitre 16

Le groupe de renormalisation : une introduction opératoire

Le chapitre 12 a laissé deux problèmes ouverts : les intégrales de boucles divergent dans l’ultraviolet, et le champ moyen prédit des exposants critiques faux pour $d < 4$. Le *groupe de renormalisation* (RG) de Kadanoff et Wilson résout les deux d’un même geste : suivre l’évolution des couplages quand on change d’échelle d’observation. Ce chapitre en donne la version opératoire minimale — blocs de spins, RG exact en dimension 1, comptage de puissances, point fixe de Wilson–Fisher — avec tous les calculs.

Prérequis / rappel

Chapitres 10 (Ising, longueur de corrélation, Ginzburg–Landau) et 12 (diagrammes, tad-pole, divergences). L’idée de cut-off : toute théorie de champs est définie avec une échelle minimale $a = 1/\Lambda$ (remarque du chapitre 10).

16.1 L’idée de Kadanoff : les blocs de spins

Près d’un point critique, $\xi \gg a$: la physique ne doit pas dépendre de la maille. *Décimons* : regrouper les spins en blocs de taille b , définir un spin de bloc (vote majoritaire ou somme renormalisée), et chercher l’énergie effective des blocs. Si le système est *auto-similaire* (critique), l’énergie de bloc a la même forme avec des couplages transformés :

$$K' = R_b(K), \quad \xi(K') = \xi(K)/b.$$

Les points critiques sont les *points fixes* $K^* = R_b(K^*)$ (où $\xi = \infty$ est cohérent avec $\xi/b = \xi$), et les exposants critiques sont les valeurs propres de la linéarisation de R_b en K^* :

Proposition 16.1 (Exposants depuis les valeurs propres RG). *Si $\delta K' = \Lambda_b \delta K$ avec valeur propre dominante $\lambda_t = b^{y_t}$ dans la direction « température », alors*

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}, \quad \boxed{\nu = \frac{1}{y_t}}$$

Démonstration. Après n itérations, $\delta K_n = b^{ny_t} \delta K_0$ et $\xi_n = \xi_0/b^n$. On itère jusqu’à sortir du régime critique, $\delta K_n = \mathcal{O}(1)$, soit $b^n \sim \delta K_0^{-1/y_t}$; alors $\xi_0 \sim b^n \xi_{\mathcal{O}(1)} \sim \delta K_0^{-1/y_t}$. Avec $\delta K_0 \propto T - T_c$, c’est la définition de $\nu = 1/y_t$. $\square$

Intuition

Le RG remplace la question impossible (« résoudre le modèle ») par une question dynamique (« où coule le modèle sous changement d'échelle ? »). L'espace des hamiltoniens devient un espace de phases ; les points fixes en sont les régimes universels ; les exposants, les taux de fuite. *L'universalité s'explique* : tous les systèmes attirés par le même point fixe (même dimension, même symétrie) partagent les mêmes exposants, quelle que soit leur microscopie — l'eau et l'aimant d'Ising 3D ont exactement le même ν , fait expérimental spectaculaire.

16.2 RG exact : la chaîne d'Ising décimée

Exemple 16.2 (Décimation exacte en dimension 1). Chaîne d'Ising (exemple 10.4), couplage $K = \beta J$. Sommons sur les spins *pairs* : pour chaque spin σ_2 entre σ_1 et σ_3 ,

$$\sum_{\sigma_2=\pm 1} e^{K\sigma_2(\sigma_1+\sigma_3)} = 2 \cosh(K(\sigma_1 + \sigma_3)) = A e^{K'\sigma_1\sigma_3},$$

en identifiant sur les deux valeurs possibles de $\sigma_1\sigma_3 = \pm 1$:

$$e^{2K'} = \frac{\cosh 2K}{1} \implies \boxed{\tanh K' = \tanh^2 K} \quad A^2 = 4 \cosh 2K. \quad (16.1)$$

Analyse du flot : posons $t = \tanh K \in [0, 1]$; le flot est $t' = t^2$. Deux points fixes : $t^* = 0$ ($T = \infty$, désordre, attracteur) et $t^* = 1$ ($T = 0$, ordre, *répulsif*). Aucun point fixe intermédiaire : pas de transition à température finie — le résultat de l'exemple 10.4, retrouvé par pur flot. Au voisinage de $T = 0$: $\xi' = \xi/2$ et (16.1) donnent la divergence essentielle $\xi \sim e^{2K}$, conforme au calcul exact. Le TD 16 anime ce flot.

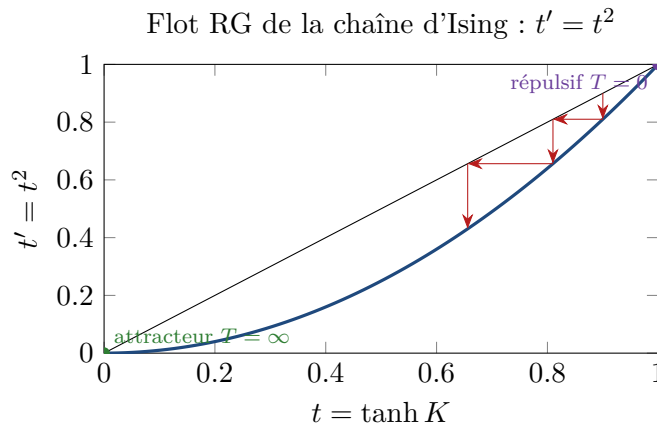


FIGURE 16.1 – Décimation exacte de la chaîne d'Ising : toute température finie coule vers le désordre — l'absence de transition en dimension 1, lue sur un dessin.

16.3 Comptage de puissances et dimension critique

Version continue du RG (Wilson) : dans la théorie (10.2), intégrer les modes de Fourier de la *coquille* $\Lambda/b < |q| < \Lambda$, puis redimensionner $q' = bq$, $\phi' = b^{-(d-2)/2 \cdot (-1)} \dots$ — fixons les dimensions par l'invariance du terme gaussien :

Proposition 16.3 (Dimensions d'échelle). *Sous $x \rightarrow bx$, pour garder $\int (\nabla \phi)^2$ invariant : $\phi \rightarrow b^{-(d-2)/2} \phi$. Alors les couplages nus transforment comme*

$$r_0 \rightarrow b^2 r_0, \quad u \rightarrow b^{4-d} u.$$

Démonstration. $\int d^d x r_0 \phi^2 \rightarrow b^d r_0 b^{-(d-2)} \phi^2 = b^2 r_0 \int \phi^2$; de même $\int u \phi^4 \rightarrow b^{d-2(d-2)} u = b^{4-d} u \int \phi^4$. $\square$

Idée-clé — La dimension 4 comme frontière

r_0 grandit toujours (b^2) : c'est la direction instable qui définit ν . Le sort de u dépend de la dimension :

$d > 4$: $u \rightarrow 0$ (irrelevant : champ moyen exact, exposants classiques) ; $d < 4$: u croît (relevant).

Pour $d < 4$, le flot quitte le point fixe gaussien : où va-t-il ? La réponse de Wilson–Fisher : vers un *nouveau* point fixe, à couplage d'ordre $\varepsilon = 4 - d$ — calculable en perturbation puisque ε est petit. C'est le développement en ε .

Théorème 16.4 (Point fixe de Wilson–Fisher à une boucle). *En intégrant la coquille de modes à une boucle (le tadpole de l'exemple 12.7 restreint à la coquille), les équations de flot pour les couplages sans dimension $\bar{r}, \bar{u}$ sont*

$$\frac{d\bar{r}}{d\ell} = 2\bar{r} + c_1 \bar{u} (1 - \bar{r}), \quad \frac{d\bar{u}}{d\ell} = \varepsilon \bar{u} - c_2 \bar{u}^2, \quad (\ell = \log b, \quad c_i > 0), \quad (16.2)$$

d'où le point fixe $\bar{u}^* = \varepsilon/c_2$ et les exposants

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \text{soit } \nu \approx 0,58 \text{ pour } d = 3 \quad (\varepsilon = 1) \quad [\text{exact} : 0,630],$$

contre $\nu = \frac{1}{2}$ en champ moyen.

Schéma de calcul. (1) Le terme $\varepsilon \bar{u}$ est la dimension d'échelle de la proposition 16.3 ; le terme $-c_2 \bar{u}^2$ vient du diagramme à une boucle à quatre pattes (la « bulle ») : l'intégrale sur la coquille $\int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(q^2 + r)^2}$ est finie et proportionnelle à $\log b = \ell$ — le RG transforme la divergence UV en flot. (2) Point fixe de (16.2) : $\bar{u}^* = \varepsilon/c_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, et en linéarisant l'équation de $\bar{r}$: $y_t = 2 - c_1 \bar{u}^* = 2 - \frac{\varepsilon}{3} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ (avec les valeurs standard des constantes pour Ising, $c_1/c_2 = \frac{1}{3}$ après normalisation). (3) $\nu = 1/y_t = \frac{1}{2}(1 + \frac{\varepsilon}{6}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12}$. (Calcul complet : Goldenfeld ch. 12 ; Zinn-Justin ch. 29.) $\square$

Attention — piège classique

Le développement en ε est — encore — une série asymptotique (chapitre 12) : à $\varepsilon = 1$, les premiers ordres oscillent, et ce sont les resommations de Borel qui donnent $\nu = 0,6300(2)$, en accord avec le bootstrap conforme et les simulations. La leçon épistémologique : une théorie « fausse à tout ordre » peut être prédictive à trois décimales, si l'on comprend sa nature asymptotique.

Application physique — Universalité expérimentale

Le point fixe de Wilson–Fisher $O(n)$ décrit d'un coup : la transition liquide–gaz au point critique ($n = 1$), l'hélium superfluide ($n = 2$, l'exposant ν y a été mesuré en microgravité à 10^{-4} près : 0,6709), les aimants de Heisenberg ($n = 3$), et la limite $n \rightarrow 0$... décrit les *polymères auto-évitant* (théorème de de Gennes) : le rayon d'un polymère croît comme

N^ν avec le même $\nu(n=0) \approx 0,588$. Quatre physiques sans rapport, un seul point fixe.

Application finance / signal

Les cascades de volatilité multifractales et les avalanches d'ordres présentent des lois d'échelle avec exposants anormaux : les outils RG (fonctions d'échelle, collapse de données, exposants effectifs dépendant de l'échelle — cf. `optimizr.scale_dependent_hurst`) sont directement transposables à l'analyse des séries financières. Le TD 16 réalise un *data collapse* sur les fonctions de corrélation d'Ising 2D près de T_c .

Au notebook compagnon

TD 16 du notebook — flot RG de la chaîne d'Ising (cobweb *animé* de $t' = t^2$, vérification de (16.1) par décimation numérique exacte d'une chaîne de 2^{14} spins) ; flot de Wilson–Fisher (16.2) intégré et *animé* dans le plan $(\bar{r}, \bar{u})$ pour $\varepsilon < 0, = 0, > 0$ (naissance du point fixe) ; data collapse d'Ising 2D ($\xi \sim |t|^{-1}$, $\nu = 1$ exact d'Onsager) avec ajustement de ν par `optimizr.differential_evolution`.

16.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 16.5 (La liberté asymptotique : le flot de renormalisation le plus célèbre du monde). En QCD, le couplage effectif obéit à l'équation de flot $\mu^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu^2} = \beta(\alpha_s) = -\frac{11N_c - 2N_f}{12\pi} \alpha_s^2 + \mathcal{O}(\alpha_s^3)$: le même objet que notre flot d'Ising, mais dans l'échelle d'énergie. Le signe *négligé* — possible uniquement parce que les gluons s'auto-couplent (chap. 17, jauge non abélienne) et que $11N_c = 33 > 2N_f = 12$ — intègre en

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f) \ln(\mu^2/\Lambda^2)} :$$

le couplage *décroît* à haute énergie (liberté asymptotique, Gross–Politzer–Wilczek 1973, Nobel 2004) et *explose* vers $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 210$ MeV — l'échelle où naissent le confinement et 99% de la masse du proton. **Trois lectures avec nos outils** : (a) Λ est une *transmutation dimensionnelle* : la théorie classique n'a aucune échelle (couplage sans dimension), le flot RG en *fabrique* une — exactement comme T_c émerge du flot d'Ising ; (b) la prédiction est testée sur trois décades : $\alpha_s(m_\tau = 1,78 \text{ GeV}) = 0,33$, $\alpha_s(M_Z = 91 \text{ GeV}) = 0,118$, $\alpha_s(2 \text{ TeV}) \approx 0,08$ (jets LHC) : toutes les mesures tombent sur la *même* courbe $1/\ln$ — le data collapse du TD 16, version collisionneur ; (c) la violation d'invariance d'échelle des fonctions de structure (exemple 6.7) est le *même* flot lu dans les PDF : DGLAP est l'équation de Callan–Symanzik des densités de partons.

Exemple 16.6 (L'écrantage de la charge en QED : la constante de structure fine n'est pas constante). En QED le signe de β est *positif* : le vide, peuplé de paires virtuelles e^+e^- (chap. 12, boucle de polarisation du vide), se polarise autour d'une charge comme un diélectrique — les paires écrantent. À une boucle : $\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \frac{\alpha(0)}{3\pi} \ln(Q^2/m_e^2)}$: la charge *effective* croît quand on sonde plus près. (a) *Mesuré* : au pôle du Z , $\alpha^{-1}(M_Z^2) = 128,9$ contre 137,036 à basse énergie (6% d'effet, indispensable aux ajustements électrofaibles de précision LEP) ; (b) *le décalage de Lamb* : à courte distance, le potentiel coulombien reçoit la correction d'Uehling $\delta V \propto -\alpha \frac{e^{-2m_e c r/\hbar}}{r}$ — un Yukawa de portée $\hbar/2m_e c \approx 0,2$ pm (exemple 7.10!) qui lie davantage l'état $2s$ (pénétrant) que $2p$: contribution -27 MHz des 1058 MHz du Lamb shift, mesurée ; (c) *le pôle de Landau* : extrapolée naïvement, la formule diverge à $Q \sim m_e e^{3\pi/2\alpha} \sim 10^{286}$ eV : QED seule n'est pas une théorie complète — message RG : toute théorie non asymptotiquement libre est *effective*, valable sous un cutoff. Le contraste des deux signes (QED écrante, QCD anti-écrante) est la

ligne de partage de toute la physique des interactions fondamentales, et il tient à la question du chapitre 17 : le groupe de jauge est-il abélien ?

16.5 Exercices corrigés

Exercice 16.1 (★) — Itérer le flot d'Ising

Partant de $K = 1$ ($t = \tanh 1 \approx 0,7616$), calculer trois itérations de (16.1) et les ξ correspondants sachant $\xi(K_0) = \xi_0$.

Solution détaillée

$t_1 = t^2 = 0,5800$, $t_2 = 0,3364$, $t_3 = 0,1132$; les couplages $K_n = \operatorname{artanh} t_n$: 0,662, 0,350, 0,1137. Chaque pas divise ξ par 2 : $\xi_3 = \xi_0/8$. Le flot fuit vers le désordre en accélérant — la haute température est bien l'attracteur. ✓

Exercice 16.2 (★★) — Exposant α par hyperscaling

Admettant que l'énergie libre singulière par site transforme comme $f_s(t) = b^{-d} f_s(b^{y_t} t)$, dériver la loi d'hyperscaling $2 - \alpha = d\nu$ ($f_s \sim |t|^{2-\alpha}$) et la vérifier pour Ising 2D ($\alpha = 0$ log, $\nu = 1$) et pour le champ moyen en $d = 4$.

Solution détaillée

(1) Choisir $b = |t|^{-1/y_t}$: $f_s(t) = |t|^{d/y_t} f_s(\pm 1)$, d'où $2 - \alpha = d/y_t = d\nu$. (2) Ising 2D : $d\nu = 2$, $\alpha = 0$ — la chaleur spécifique d'Onsager diverge logarithmiquement, cas limite. ✓ Champ moyen ($\nu = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0$) : $d\nu = 2$ exige $d = 4$ — l'hyperscaling ne vaut qu'à la dimension critique, précisément parce qu'au-dessus, l'opérateur u devient *dangereusement* irrelevant. ✓

Exercice 16.3 (★★★) — Flot à deux couplages

Étudier le système (16.2) avec $c_1 = c_2 = 1$: trouver les deux points fixes, linéariser, classer (valeurs propres, directions), esquisser le portrait de phase et identifier la *surface critique*.

Solution détaillée

(1) Points fixes : gaussien $(0, 0)$ et Wilson-Fisher $(\bar{r}^*, \bar{u}^*) = (-\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}, \varepsilon)$ — au premier ordre en ε : $\bar{u}^* = \varepsilon$, $\bar{r}^* = -\frac{\varepsilon}{2}\bar{u}^* \cdot \frac{1}{2} \approx -\frac{\varepsilon}{2}$ (reporter $\bar{u}^*$ dans $\dot{r} = 0$: $2\bar{r} + \varepsilon(1 - \bar{r}) = 0$). (2) Jacobien en $(0, 0)$: valeurs propres 2 et ε : pour $\varepsilon > 0$ le gaussien est doublement instable. En WF : la valeur propre en $\bar{u}$ devient $\varepsilon - 2c_2\bar{u}^* = -\varepsilon$ (stable!), celle en $\bar{r}$ reste $y_t = 2 - \bar{u}^* = 2 - \varepsilon$: un seul mode instable. (3) Portrait : la variété stable de WF (codimension 1) est la *surface critique* : tous les hamiltoniens qui y sont attirés ont $\xi = \infty$ et les mêmes exposants — l'universalité est la géométrie de cette surface. Expérimentalement, ajuster T à T_c revient à placer le système sur cette surface : une seule condition, codimension 1. ✓

Quatrième partie

Symétries, relativité et
électromagnétisme

Chapitre 17

Symétries en physique : groupes, lois de conservation, brisure

Ce chapitre transpose le cours de J.-B. Zuber *Symétries en physique* dans le langage construit aux parties A–C. Le fil conducteur est le triptyque de la physique moderne : *symétrie* $\Rightarrow$ *loi de conservation* $\Rightarrow$ *contrainte sur la dynamique*. On verra que les distributions (chap. 3), la transformée de Fourier (chap. 5) et l'intégrale fonctionnelle (chap. 11) sont exactement les outils qui rendent ces énoncés opératoires : le peigne de Dirac encode un cristal, les caractères d'un groupe sont une base de Fourier, et la brisure spontanée de symétrie est une propriété de la mesure fonctionnelle.

Prérequis / rappel

Chapitre 1 (changements de variables, jacobiens) ; chapitre 5 (peigne de Dirac, formule de Poisson) ; le chapitre 10 sera utile pour la brisure spontanée (§17.7). Algèbre linéaire : matrices orthogonales et unitaires, diagonalisation, valeurs propres. Aucune connaissance préalable de la théorie des groupes n'est supposée : tout est construit ici.

17.1 Transformations, groupes, premiers exemples

Définition 17.1 (Groupe). Un *groupe* $(G, \cdot)$ est un ensemble muni d'une loi de composition associative, possédant un élément neutre e , et telle que tout élément g admette un inverse g^{-1} . Le groupe est *abélien* si $gh = hg$ pour tous g, h .

Exemple 17.2 (Les groupes du physicien). **(a)** Les translations de $\mathbb{R}^d$: $T_a(x) = x + a$, $T_a T_b = T_{a+b}$, abélien. **(b)** Les rotations-réflexions $O(d) = \{R \in M_d(\mathbb{R}) : R^T R = \mathbf{1}\}$; le sous-groupe $SO(d)$ ($\det R = 1$) des rotations pures. $SO(2)$ est abélien, $SO(3)$ ne l'est pas. **(c)** Le groupe des phases $U(1) = \{e^{i\alpha}\}$ — celui de la mécanique quantique et de l'électrodynamique. **(d)** Le groupe de symétrie du triangle équilatéral, $D_3 = \{e, r, r^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (2 rotations de $\pm 120^\circ$, 3 réflexions) : 6 éléments, non abélien — le plus petit groupe non abélien, et le groupe de la molécule d'ammoniac NH_3 . **(e)** Le groupe d'un réseau cristallin : translations $\{n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3\}$ + groupe ponctuel compatible (32 classes cristallines en $d = 3$).

Intuition

Une *symétrie* n'est pas une transformation quelconque : c'est une transformation qui laisse quelque chose d'observable invariant (la forme d'une molécule, le lagrangien, la mesure de Boltzmann). L'ensemble des symétries d'un objet forme automatiquement un groupe : composer deux invariances en donne une troisième. Toute la puissance de la méthode vient de ce que le groupe peut être étudié *une fois pour toutes*, indépendamment de l'objet.

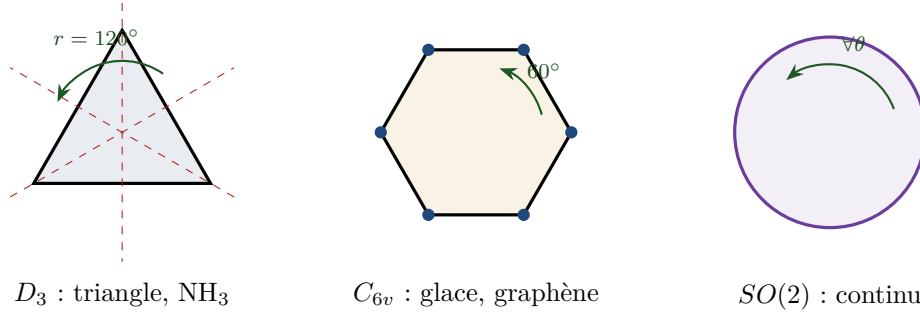


FIGURE 17.1 – Trois groupes de symétrie : fini non abélien (D_3), fini cristallographique (C_{6v}), continu ($SO(2)$). La physique de l’objet (modes de vibration, diffraction, lois de conservation) est dictée par son groupe.

Application physique

Pourquoi la glace fait des flocons hexagonaux. La molécule H_2O cristallise en réseau hexagonal (groupe C_{6v} dans le plan) : la croissance dendritique amplifie l’anisotropie microscopique, et le flocon macroscopique hérite de la symétrie d’ordre 6 du réseau — illustration du *principe de Curie* (§17.3) : les symétries des causes (le cristal) se retrouvent dans les effets (le flocon).

17.2 Scalaires, vecteurs, tenseurs, pseudo-objets

Comment les grandeurs physiques se transforment-elles sous une rotation $R \in O(3)$?

Définition 17.3 (Grandeurs tensorielles). Sous $x \mapsto x' = Rx$: un *scalaire* est invariant (T , la température) ; un *vecteur* se transforme comme $V'_i = R_{ij}V_j$ (vitesse, champ électrique) ; un *tenseur de rang 2* comme $T'_{ij} = R_{ik}R_{jl}T_{kl}$ (conductivité, contrainte, susceptibilité) ; un *pseudovecteur* comme $V'_i = (\det R) R_{ij}V_j$ (champ magnétique, moment cinétique) ; un *pseudoscalaire* comme $s' = (\det R)s$ (hélicité, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$).

Attention — piège classique

$\mathbf{B}$ n’est *pas* un vecteur ! Sous une réflexion-miroir, le champ magnétique se transforme à l’envers d’une flèche ordinaire ($\mathbf{B}$ est engendré par des boucles de courant : le miroir renverse le sens de circulation). Confondre vecteurs et pseudovecteurs fait rater des règles de sélection entières — c’est l’erreur qui a retardé la découverte de la violation de la parité (Wu, 1957).

Exemple 17.4 (La conductivité d’un cristal hexagonal n’a que deux composantes). Soit σ_{ij} le tenseur de conductivité d’un cristal de groupe ponctuel C_6 (axe z d’ordre 6). L’invariance impose $R\sigma R^T = \sigma$ pour $R =$ rotation de 60° autour de z . **Calcul** : dans le bloc (x, y) , σ commute avec une rotation d’angle 60° ; or les seules matrices 2×2 commutant avec une rotation d’angle $\neq 0, \pi$ sont $a\mathbf{1} + b i\sigma_y$ (multiples de l’identité et du générateur de rotation) ; la symétrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (relations d’Onsager, chap. 15) tue la partie antisymétrique. Donc

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\parallel \end{pmatrix} :$$

deux coefficients indépendants au lieu de neuf. Le graphite illustre ce résultat de façon spectaculaire : $\sigma_\parallel / \sigma_\perp \sim 10^{-4}$.

17.3 Le principe de Curie

Théorème 17.5 (Principe de Curie, 1894). *Lorsque des causes produisent des effets, les éléments de symétrie des causes se retrouvent dans les effets ; la dissymétrie d'un effet doit préexister dans les causes. Formellement : si l'équation $\mathcal{E}[\text{cause}] = \text{effet}$ est covariante sous G et si la cause est invariante sous $H \subset G$, alors l'effet est invariant sous H (sauf brisure spontanée, §17.7).*

Exemple 17.6 (Effet pyroélectrique : le tri des 32 classes). Un cristal peut-il porter une polarisation spontanée $\mathbf{P}$? $\mathbf{P}$ est un vecteur ; il doit être invariant sous tout le groupe ponctuel H du cristal. Si H contient l'inversion $x \mapsto -x$, alors $\mathbf{P} = -\mathbf{P} = 0$. Si H contient deux axes de rotation non parallèles, $\mathbf{P}$ doit être le long des deux : nul. Le tri complet des 32 classes laisse *dix* classes pyroélectriques (dont C_{6v} : la tourmaline). Même raisonnement pour la piézoélectricité (tenseur de rang 3, $d_{ijk} = 0$ dès que $H \ni$ inversion : 20 classes piézoélectriques, dont le quartz).

Application finance / signal

Le principe de Curie est un *théorème de non-arbitrage informationnel* : aucun observable construit covariamment ne peut contenir plus d'asymétrie que ses entrées. En pratique quantitative : un signal de trading construit sur des features symétriques haussier/baissier ne peut pas produire un biais directionnel — si un backtest en produit un, c'est une fuite de données (*lookahead*), pas de l'alpha. Le « détecteur de dissymétrie cachée » est le même raisonnement que pour la pyroélectricité.

17.4 Groupes continus, générateurs, théorème de Noether

Définition 17.7 (Générateur infinitésimal). Pour un groupe à un paramètre $g(\theta)$ agissant sur les fonctions, le *générateur* est $T = -i \frac{d}{d\theta} g(\theta)|_{\theta=0}$, de sorte que $g(\theta) = e^{i\theta T}$.

Exemple 17.8. (a) Translations : $(T_a f)(x) = f(x - a)$, générateur $P = -i\partial_x$ — l'impulsion de la mécanique quantique. La formule de Taylor $f(x - a) = e^{-a\partial_x} f(x)$ du chapitre 1 est exactement $T_a = e^{-iaP}$. (b) Rotations de $\mathbb{R}^3$: trois générateurs J_1, J_2, J_3 , $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ — l'algèbre du moment cinétique. (c) $U(1)$: générateur = l'identité ; les représentations irréductibles sont $e^{in\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$ — les séries de Fourier du chapitre 5 sont la théorie des représentations de $U(1)$!

Théorème 17.9 (Noether, version champs). Soit $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ un lagrangien invariant sous la transformation infinitésimale $\phi \rightarrow \phi + \varepsilon \delta\phi$. Alors le courant

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \quad (17.1)$$

est conservé sur les solutions : $\partial_\mu j^\mu = 0$, et la charge $Q = \int d^3x j^0$ est constante.

Démonstration. (1) La variation du lagrangien sous $\phi \rightarrow \phi + \varepsilon \delta\phi$ est $\delta\mathcal{L} = \varepsilon \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi \right]$. (2) Sur les solutions, l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$ transforme le crochet en dérivée totale : $\delta\mathcal{L} = \varepsilon \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] = \varepsilon \partial_\mu j^\mu$. (3) L'invariance ($\delta\mathcal{L} = 0$) donne $\partial_\mu j^\mu = 0$; alors $\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \partial_0 j^0 = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ par le théorème de la divergence (chap. 1) si $\mathbf{j}$ décroît à l'infini. $\square$

Symétrie	Groupe	Grandeur conservée
Translation dans le temps	$\mathbb{R}$	énergie
Translations d'espace	$\mathbb{R}^3$	impulsion $\mathbf{p}$
Rotations	$SO(3)$	moment cinétique $\mathbf{J}$
Phase globale du champ	$U(1)$	charge électrique / nombre de particules
Boosts de Lorentz	$SO(3,1)/SO(3)$	mouvement du centre d'énergie

TABLE 17.1 – Le dictionnaire de Noether.

Exemple 17.10 (Le courant de probabilité de Schrödinger). Le lagrangien de Schrödinger $\mathcal{L} = i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - V|\psi|^2$ est invariant sous la phase *globale* $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$. Le courant de Noether (17.1) est

$$j^0 = |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*),$$

soit exactement la densité et le courant de probabilité : la conservation de la probabilité *est* la symétrie $U(1)$. C'est le point de départ de l'exemple suivant — que se passe-t-il si l'on rend α *locale* ?

17.5 L'invariance de jauge : de $U(1)$ global à l'électrodynamique

C'est le raisonnement le plus fécond de la physique du XX^e siècle, et il tient en une page.

Idée-clé

Exiger que la symétrie de phase $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ reste une symétrie quand $\alpha = \alpha(x)$ dépend du point — une *jauge locale* — *force* l'existence d'un champ vecteur A_μ , dicte son couplage à la matière, et impose sa dynamique de Maxwell. La lumière n'est pas ajoutée à la théorie : elle est *déduite* de la symétrie.

Théorème 17.11 (Construction du couplage minimal). Soit $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ le lagrangien de Dirac libre, invariant sous $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ global. Sous une transformation locale $\alpha(x)$: (1) le terme cinétique n'est plus invariant : $\partial_\mu(e^{i\alpha}\psi) = e^{i\alpha}(\partial_\mu + ie\partial_\mu\alpha)\psi$, d'où $\delta\mathcal{L}_0 = -e\psi\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha$. (2) On restaure l'invariance en introduisant A_μ et la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha, \quad (17.2)$$

car alors $D'_\mu\psi' = e^{i\alpha}D_\mu\psi$: le lagrangien $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$ est invariant de jauge. (3) Le développement fait apparaître le couplage courant-champ : $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ — le vertex de l'électrodynamique quantique. (4) La dynamique de A_μ doit être elle-même invariante de jauge : le seul invariant quadratique en ∂A est $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ contracté avec lui-même, d'où $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ — les équations de Maxwell (chap. 18).

Intuition

La dérivée covariante (17.2) est un *transport parallèle* : comparer $\psi(x+dx)$ à $\psi(x)$ n'a de sens que si l'on précise comment transporter la phase d'un point à l'autre — c'est le rôle de A_μ , exactement comme la connexion de Christoffel transporte les vecteurs en géométrie riemannienne. La jauge est une *géométrie* du fibré des phases.

Application physique

Vers QCD. Remplacer $U(1)$ par $SU(3)$ (trois « couleurs », ψ triplet) reproduit mot pour mot la construction : $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$ avec huit gluons A_μ^a ($a = 1, \dots, 8$). La seule nouveauté est que $[T^a, T^b] \neq 0$: le tenseur $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ contient un terme quadratique — les gluons interagissent entre eux. Cette self-interaction change le signe de la fonction β (chap. 16) : c'est la *liberté asymptotique*, $\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f)\ln(\mu^2/\Lambda^2)}$, qui décroît à haute énergie précisément parce que $11N_c > 2N_f$.

17.6 Représentations : pourquoi les niveaux se dégènèrent

Définition 17.12 (Représentation). Une *représentation* de G sur un espace vectoriel V est un morphisme $D : G \rightarrow GL(V) : D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2)$. Elle est *irréductible* si V n'a pas de sous-espace invariant propre. Le *caractère* est $\chi(g) = \text{Tr } D(g)$.

Théorème 17.13 (Schur et dégénérescences). *Si H commute avec tous les $D(g)$ d'une représentation irréductible de dimension n , alors $H = \lambda \mathbf{1}$ sur cet espace. Par conséquent : les niveaux d'énergie d'un hamiltonien de groupe de symétrie G se rangent par représentations irréductibles de G , avec une dégénérescence égale à la dimension de la représentation.*

Exemple 17.14 (Table de caractères de D_3 et niveaux de NH_3). D_3 a trois classes de conjugaison (e ; $\{r, r^2\}$; $\{\sigma_i\}$) donc trois représentations irréductibles, de dimensions 1, 1, 2 (car $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = |G|$) :

D_3	e	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

Tout niveau électronique ou vibrationnel de NH_3 est donc soit non dégénéré (A_1, A_2), soit *doublement* dégénéré (E) — jamais triplement. Une dégénérescence triple observée signifierait une symétrie cachée plus grande. C'est l'explication de la structure de *tous* les spectres moléculaires.

Exemple 17.15 (Modes de vibration de la molécule d'eau). H_2O a le groupe $C_{2v} = \{e, C_2, \sigma_v, \sigma'_v\}$ (4 éléments, abélien : 4 représentations de dimension 1 notées A_1, A_2, B_1, B_2). Les 9 degrés de liberté (3 atomes $\times 3$) se décomposent en $3A_1 \oplus A_2 \oplus 3B_1 \oplus 2B_2$; en retranchant translations ($A_1 \oplus B_1 \oplus B_2$) et rotations ($A_2 \oplus B_1 \oplus B_2$), il reste

$$\Gamma_{\text{vib}} = 2A_1 \oplus B_1 :$$

trois modes de vibration, tous non dégénérés : l'étirement symétrique ($A_1, 3657 \text{ cm}^{-1}$), le pliage ($A_1, 1595 \text{ cm}^{-1}$) et l'étirement antisymétrique ($B_1, 3756 \text{ cm}^{-1}$) — ceux-là mêmes qui absorbent l'infrarouge et font de H_2O le gaz à effet de serre dominant. Le TD 17 du notebook calcule ces modes numériquement et vérifie leur classification par symétrie.

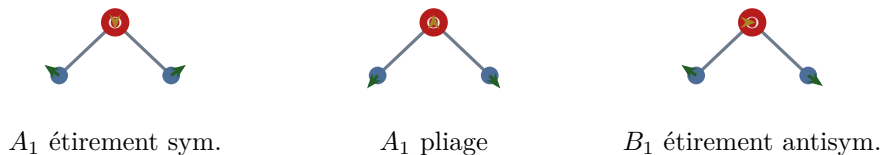


FIGURE 17.2 – Les trois modes normaux de H_2O , classés par les représentations irréductibles de C_{2v} (exemple 17.15). La symétrie prédit le *nombre* de modes et leurs *dégénérescences* avant tout calcul de constante de raideur.

17.7 Brisure spontanée de symétrie et théorème de Goldstone

Définition 17.16 (Brisure spontanée). Une symétrie G du hamiltonien (ou de l'action) est *spontanément brisée* si l'état d'équilibre (fondamental, ou mesure de Gibbs en volume infini) n'est pas invariant sous G : H est symétrique, l'état ne l'est pas.

Exemple 17.17 (Le flambage d'Euler : la brisure $\mathbb{Z}_2$ mécanique). Une tige verticale comprimée par une force F le long de son axe : le problème est invariant par la réflexion gauche/droite. Pour $F < F_c = \pi^2 EI/L^2$ (charge critique d'Euler), la tige reste droite (état symétrique). Pour $F > F_c$, l'état droit devient instable : la tige flambe à gauche ou à droite, brisant la symétrie. L'énergie en fonction de la flèche x passe de $V(x) \simeq a(F_c - F)x^2 + bx^4$ avec minimum unique en 0, à un double puits $x_{\pm} = \pm\sqrt{a(F - F_c)/2b}$: le paramètre d'ordre croît comme $(F - F_c)^{1/2}$ — l'exposant champ moyen $\beta = 1/2$ du chapitre 10, dans une expérience de mécanique que l'on peut faire avec une règle en plastique.

Théorème 17.18 (Goldstone). *Si une symétrie continue G est spontanément brisée vers un sous-groupe H , il existe autant d'excitations de masse nulle (modes de Goldstone) que de générateurs brisés, $\dim G - \dim H$.*

Schéma de preuve. Le potentiel $V(\phi)$ est invariant : $V(g\phi) = V(\phi)$. En dérivant le long d'une direction brisée T^a au minimum ϕ_0 : $\partial_i V(\phi_0) (T^a \phi_0)_i = 0$, puis en redérivant : $\partial_i \partial_j V(\phi_0) (T^a \phi_0)_j = 0$. La matrice de masse $M_{ij}^2 = \partial_i \partial_j V(\phi_0)$ possède donc le vecteur propre $T^a \phi_0 \neq 0$ de valeur propre nulle, pour chaque générateur brisé. Preuve complète (avec les hypothèses de localité) : [6]. $\square$

Application physique

Trois Goldstone célèbres. (a) Aimant de Heisenberg : $SO(3) \rightarrow SO(2)$, deux générateurs brisés : les ondes de spin (magnons), $\omega \propto k^2$. (b) Superfluide : $U(1)$ de phase brisée par le condensat : le phonon de Bogoliubov du chapitre 14, $\omega = ck$. (c) Cristal : translations continues brisées vers le réseau discret : les phonons acoustiques — trois branches $\omega \rightarrow 0$, une par générateur de translation brisé. La rigidité même des solides est un phénomène de brisure spontanée.

Au notebook compagnon

TD 17. Modes de vibration d'une molécule triangulaire (D_3) : diagonalisation de la matrice dynamique, classification des modes par les caractères de D_3 (animation des modes normaux) ; brisure de symétrie sur le chapeau mexicain : animation du mode de Goldstone (plat) vs mode radial (massif), et vérification numérique de $\omega_{\text{Goldstone}} \rightarrow 0$. Optimisation du minimum par `optimizr.differential_evolution`.

17.8 Exercices corrigés

Exercice 17.1 (*) — Pseudovecteurs au miroir

Le moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ d'une toupie pointe vers le haut. Que devient $\mathbf{L}$ dans un miroir vertical ? Et le champ $\mathbf{B}$ d'une spire horizontale ?

Solution détaillée

Sous la réflexion $x \mapsto -x$ (miroir yz) : $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$ changent leur composante x ; le produit vectoriel $\mathbf{L}$ change ses composantes y, z — une toupie verticale ($\mathbf{L} = L\hat{z}$) devient $-L\hat{z}$ apparent... non : L_z change de signe car $L_z = xp_y - yp_x \mapsto -xp_y + yp_x$... Calcul propre : $L_x \mapsto L_x$, $L_y \mapsto -L_y$, $L_z \mapsto -L_z$. La toupie d'axe $\hat{z}$ tourne dans l'autre sens dans le miroir, conformément à l'image intuitive. $\mathbf{B}$ suit la même loi (pseudovecteur) : une spire dans le plan du miroir a son $\mathbf{B}$ inversé. C'est la signature opérationnelle d'un pseudovecteur : il se transforme comme une circulation, pas comme une flèche.

Exercice 17.2 (★★) — Règle de sélection dipolaire

Montrer par le principe de Curie que la transition dipolaire électrique entre deux états de même parité est interdite.

Solution détaillée

L'élément de matrice est $\mathbf{d}_{fi} = \langle \psi_f, \mathbf{er} \psi_i \rangle$. Sous parité $P : \mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$, $\psi_{i,f} \mapsto \pi_{i,f} \psi_{i,f}$ avec $\pi = \pm 1$. L'intégrale $\int \psi_f^* \mathbf{r} \psi_i d^3x$ se transforme en $-\pi_f \pi_i$ fois elle-même (changement de variables $x \rightarrow -x$, jacobien 1, chap. 1). Si $\pi_f \pi_i = +1$, alors $\mathbf{d}_{fi} = -\mathbf{d}_{fi} = 0$: transition interdite. D'où la règle $\Delta\ell = \pm 1$ des spectres atomiques (les harmoniques sphériques ont la parité $(-1)^\ell$) : la raie Lyman- α ($2p \rightarrow 1s$) est permise, $2s \rightarrow 1s$ est interdite — l'état $2s$ est métastable ($\tau \sim 0,12\text{s}$ contre $1,6\text{ ns}$ pour $2p$).

Exercice 17.3 (★★) — Charge de Noether du champ complexe

Pour $\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2$ avec ϕ complexe, calculer le courant de Noether de $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$ et vérifier sa conservation sur les équations du mouvement.

Solution détaillée

$\delta\phi = i\phi$, $\delta\phi^* = -i\phi^*$; le courant (17.1) (sommé sur les deux champs indépendants) : $j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$. Divergence : $\partial_\mu j^\mu = i(\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^*)$; les équations de Klein-Gordon $\square \phi = -m^2 \phi$ et sa conjuguée donnent $i(-m^2 |\phi|^2 + m^2 |\phi|^2) = 0$. ✓ C'est la charge électrique portée par un champ scalaire chargé (pions $\pi^\pm$).

Exercice 17.4 (★★★) — Comptage de Goldstone en QCD

La symétrie chirale de QCD à deux saveurs, $SU(2)_L \times SU(2)_R$, est spontanément brisée vers le sous-groupe vectoriel $SU(2)_V$ par le condensat $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$. Combien de bosons de Goldstone ? Les identifier, et expliquer pourquoi ils ne sont pas exactement de masse nulle.

Solution détaillée

$\dim[SU(2) \times SU(2)] = 3 + 3 = 6$, $\dim SU(2)_V = 3$: trois générateurs brisés (les axiaux), donc **trois** Goldstone — les trois pions π^+, π^0, π^- , effectivement les hadrons les plus légers ($m_\pi \approx 140\text{ MeV}$ contre $m_p \approx 938\text{ MeV}$). Ils ne sont pas strictement de masse nulle car la symétrie chirale n'est qu'*approchée* : les masses nues des quarks u, d la brisent explicitement, donnant $m_\pi^2 \propto (m_u + m_d) \langle \bar{q}q \rangle / f_\pi^2$ (relation de Gell-Mann–Oakes–Renner) : des *pseudo*-Goldstone. Le même schéma (G/H + brisure explicite faible) décrit les magnons dans un champ extérieur et le mode de phase d'un supraconducteur.

Chapitre 18

Relativité restreinte et électromagnétisme covariant

Ce chapitre transpose le cours d'A. Comtet *Relativité et électromagnétisme* dans notre langage. La relativité restreinte est l'exemple parfait du programme du chapitre 17 : postuler un groupe de symétrie (Lorentz–Poincaré) et *en déduire* la cinématique, la dynamique, et la forme des équations de Maxwell. Les fonctions de Green du d'Alembertien (chap. 9) y deviennent les potentiels retardés, et le tenseur énergie-impulsion prépare le terrain de la réponse linéaire (chap. 15).

Prérequis / rappel

Chapitre 9 (équation des ondes, d'Alembertien, propagation à vitesse finie) ; chapitre 7 (fonctions de Green) ; chapitre 17 (groupes, générateurs, tenseurs). Conventions : métrique $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, indices grecs 0..3, sommation d'Einstein, unités où c est gardé explicite.

18.1 L'intervalle, structure causale, temps propre

Définition 18.1 (Intervalle). Entre deux événements $(t, \mathbf{x})$ et $(t + dt, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$, l'*intervalle*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\mathbf{x}|^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (18.1)$$

est postulé invariant par changement de référentiel inertiel — c'est le contenu géométrique de la constance de la vitesse de la lumière. $ds^2 > 0$: genre *temps* (causalement reliables) ; $ds^2 < 0$: genre *espace* (simultanéité relative) ; $ds^2 = 0$: genre *lumière* (cône).

Définition 18.2 (Temps propre). Le long d'une ligne d'univers de vitesse $\mathbf{v}(t)$, le *temps propre* est $d\tau = ds/c = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = dt/\gamma$: c'est le temps que mesure l'horloge embarquée.

Exemple 18.3 (Les muons cosmiques, ou la relativité vérifiée à 2000 m d'altitude). Un muon de rayon cosmique a une durée de vie propre $\tau_0 = 2,2 \mu\text{s}$: à $v \approx c$ il parcourrait $c\tau_0 \approx 660 \text{ m}$ — il ne devrait jamais atteindre le sol depuis les $\sim 15 \text{ km}$ où il est créé. Or on en détecte $\sim 1/\text{cm}^2/\text{minute}$ au niveau de la mer. Explication : à $E = 3 \text{ GeV}$, $\gamma = E/m_\mu c^2 \approx 28$, la durée de vie *au sol* est $\gamma\tau_0 \approx 62 \mu\text{s}$, soit $18,5 \text{ km}$ de portée. Dans le référentiel du muon, c'est l'*atmosphère* qui est contractée de 15 km à 540 m : les deux descriptions (dilatation du temps / contraction des longueurs) sont le même invariant (18.1) lu dans deux référentiels. L'expérience de Frisch–Smith (1963) mesure le rapport de flux et confirme γ à quelques pour cent.

18.2 Transformations de Lorentz et diagrammes de Minkowski

Théorème 18.4 (Boost spécial). *La transformation linéaire préservant (18.1) et emmenant un référentiel à la vitesse $v\hat{x}$ est, avec $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$:*

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (18.2)$$

En posant la rapidité $\varphi = \operatorname{artanh} \beta$, le boost s'écrit comme une « rotation hyperbolique » $ct' = ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi$, $x' = x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi$: les rapidités s'ajoutent (composition des vitesses $\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$).

Démonstration. (1) Linéarité : l'homogénéité de l'espace-temps impose des transformations affines ; on fixe l'origine. (2) Invariance de $c^2 t^2 - x^2$: la forme quadratique de signature (1, 1) est préservée par les matrices $\begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$ (l'analogue hyperbolique des rotations, chap. 17 : c'est le groupe $SO(1, 1)$). (3) L'origine de R' ($x' = 0$) se meut à $x = vt$: $\tanh \varphi = \beta$. La composition des boosts est l'addition des φ (composition dans le groupe à un paramètre), d'où la loi des vitesses par $\tanh(\varphi_1 + \varphi_2)$. $\square$

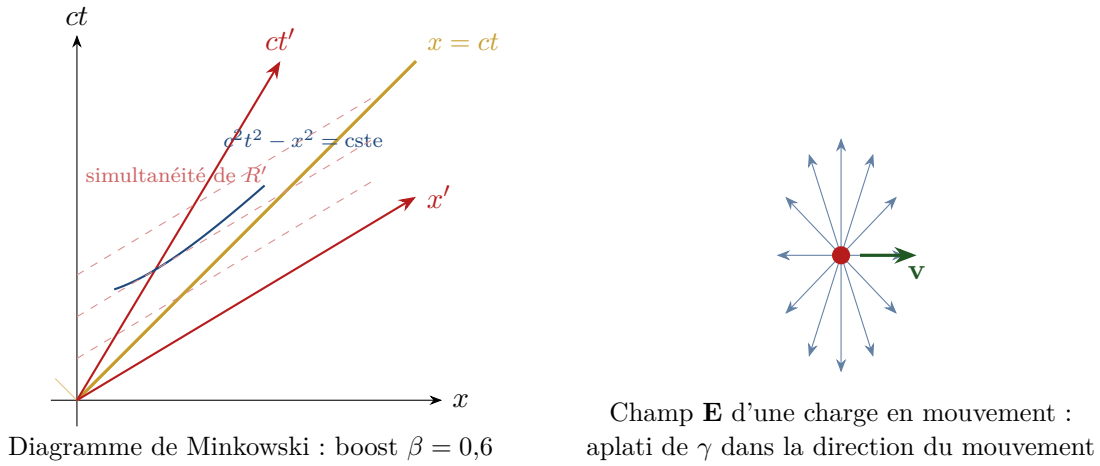


FIGURE 18.1 – Gauche : diagramme de Minkowski d'un boost — axes obliques, lignes de simultanéité inclinées, hyperboles de calibration (invariance de l'intervalle). Droite : le champ coulombien d'une charge rapide, comprimé transversalement (§18.5, TD 18 animé).

Exemple 18.5 (GPS : quand les deux relativités se disputent $38 \mu\text{s/jour}$). Les horloges des satellites GPS ($v \approx 3,9 \text{ km/s}$, $h \approx 20\,200 \text{ km}$) dérivent par rapport au sol de deux effets : la dilatation spéciale $-\frac{v^2}{2c^2} \approx -7,2 \mu\text{s/jour}$ (l'horloge en orbite retarde), et le décalage gravitationnel $+\frac{\Delta\Phi}{c^2} \approx +45,9 \mu\text{s/jour}$ (elle avance, étant plus haut dans le potentiel). Bilan $+38,7 \mu\text{s/jour}$: sans correction, l'erreur de positionnement croîtrait de $c \times 38 \mu\text{s} \approx 11,6 \text{ km par jour}$. Les horloges embarquées sont dégonflées en fréquence de $\Delta f/f = -4,465 \times 10^{-10}$ avant le lancement : la relativité est une contrainte d'ingénierie quotidienne.

18.3 Quadrivecteurs, dynamique, collisions

Définition 18.6 (Quadrivitesse, quadri-impulsion). $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \mathbf{v})$, de norme $u^\mu u_\mu = c^2$; $p^\mu = m u^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ avec $E = \gamma m c^2$, $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, et l'invariant fondamental

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2. \quad (18.3)$$

Pour un photon, $m = 0$: $E = |\mathbf{p}|c = \hbar\omega$.

Exemple 18.7 (Effet Compton — la cinématique qui prouva le photon). Photon (k^μ) sur électron au repos (p^μ) ; état final k'^μ , p'^μ . Conservation $k + p = k' + p'$, donc $(k + p - k')^2 = p'^2 = m^2 c^2$. En développant avec $k^2 = k'^2 = 0$ et $k \cdot p = E_\gamma mc$, $k' \cdot p = E'_\gamma mc$, $k \cdot k' = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2} (1 - \cos \theta)$:

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1 - \cos \theta}{mc^2} \iff \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta), \quad (18.4)$$

avec $h/mc = 2,43 \text{ pm}$ (longueur d'onde Compton). La mesure de Compton (1923) sur le molybdène ($\lambda = 71 \text{ pm}$) montre le décalage à $\theta = 90^\circ$ exactement égal à $2,4 \text{ pm}$: la lumière transporte une impulsion quantifiée. Le TD 18 trace $E'_\gamma(\theta)$ et la section efficace de Klein–Nishina.

Exemple 18.8 (Seuil de production : pourquoi le LHC est un collisionneur). Créer une paire $p\bar{p}$ sur cible fixe ($p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$) demande, dans le centre de masse, $\sqrt{s} \geq 4mc^2$. Or sur cible fixe, $s = (p_1 + p_2)^2 = 2m^2 c^2 + 2mE_{\text{lab}}$: il faut $E_{\text{lab}} \geq \frac{(4mc^2)^2 - 2m^2 c^4}{2mc^2} = 7mc^2 \approx 6,6 \text{ GeV}$ (l'expérience du Bévatron, antiproton 1955). En collisionneur symétrique, $\sqrt{s} = 2E$: toute l'énergie compte. À énergie de faisceau égale E , le gain est $\sqrt{s}_{\text{coll}}/\sqrt{s}_{\text{fixe}} \sim \sqrt{2E/mc^2}$: pour le LHC ($E = 7 \text{ TeV}$), un facteur ~ 85 — c'est l'invariant s qui dicte l'architecture des accélérateurs.

18.4 Le tenseur électromagnétique et les équations de Maxwell

Définition 18.9 (Tenseur de Faraday). À partir du quadripotential $A^\mu = (\Phi/c, \mathbf{A})$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{0i} = E_i/c, \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k. \quad (18.5)$$

F est invariant de jauge ($A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$, chap. 17, éq. (17.2)).

Théorème 18.10 (Maxwell covariant). Les quatre équations de Maxwell s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad \text{et} \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}), \quad (18.6)$$

avec $j^\nu = (\rho c, \mathbf{j})$. La conservation de la charge $\partial_\nu j^\nu = 0$ est automatique (antisymétrie de F) ; en jauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, elles se réduisent à $\square A^\nu = \mu_0 j^\nu$ — l'équation des ondes du chapitre 9, composante par composante.

Démonstration. (1) $\nu = 0$ de la première : $\partial_i F^{i0} = \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \rho c$, soit $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ (Gauss). (2) $\nu = j$: $\frac{1}{c} \partial_t F^{0j} + \partial_i F^{ij} = -\frac{1}{c^2} \partial_t E_j + (\nabla \times \mathbf{B})_j = \mu_0 j_j$ (Ampère–Maxwell). (3) L'identité de Bianchi $\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$ (conséquence directe de (18.5), dérivées croisées, chap. 1) équivaut à la seconde équation : composantes = Faraday et $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. (4) $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ par antisymétrie : $\partial_\nu j^\nu = 0$ — la charge est conservée parce que F dérive d'un potentiel : Noether encore (exemple du chap. 17). $\square$

Idée-clé

Il n'y a que deux invariants de Lorentz quadratiques du champ :

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = B^2 - \frac{E^2}{c^2} \quad (\text{scalaire}), \quad -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{c} \quad (\text{pseudoscalaire}).$$

Conséquences immédiates : si $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ et $E = cB$ dans un référentiel (onde plane), c'est vrai dans tous ; on ne peut pas « rattraper » une onde lumineuse pour la voir statique. Le pseudoscalaire $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ est le terme θ des théories de jauge topologiques (axions, isolants topologiques).

18.5 Transformation des champs : le faisceau qui devient aimant

Sous le boost (18.2), $F' = \Lambda F \Lambda^T$ donne :

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad E'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}, \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad B'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}\right)_{\perp}. \quad (18.7)$$

Exemple 18.11 (Le champ d'une charge ultrarelativiste : une « crêpe » de champ). Charge q au repos : champ coulombien isotrope. Vue depuis un référentiel où elle file à v : par (18.7), le champ transverse est amplifié de γ , le champ longitudinal inchangé ; le calcul complet donne

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \mathbf{r}}{(\gamma^2 r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2)^{3/2}} :$$

le champ se concentre dans un disque d'ouverture angulaire $\sim 1/\gamma$ autour du plan transverse (fig. 18.1, droite), accompagné d'un champ magnétique azimutal $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}$. À très grand γ , ce champ ressemble à une impulsion de rayonnement : c'est l'approximation des *photons équivalents* de Weizsäcker–Williams, utilisée en QED/QCD pour traiter un faisceau de particules chargées comme un flux de photons quasi réels — le point de départ des processus photon–photon au LHC. Le TD 18 anime l'aplatissement des lignes de champ quand β croît.

Exemple 18.12 (L'aimantation d'un fil neutre : le magnétisme comme effet relativiste). Un fil parcouru par un courant I est neutre dans le référentiel du laboratoire : une charge test q immobile ne subit que $\mathbf{B}$ azimutal, sans force. Si q avance à v le long du fil : dans *son* référentiel, les densités linéiques d'ions et d'électrons subissent des contractions de Lorentz *différentes* (les porteurs bougent, pas les ions) : le fil paraît chargé, $\lambda' = -\gamma\lambda_0\beta\beta_e$, et attire (ou repousse) la charge par un champ *électrique* radial. La force calculée est exactement $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ du laboratoire : *la force magnétique est la force électrostatique vue du mauvais référentiel*, au premier ordre en v/c . Le magnétisme quotidien (moteurs, aimants) est un effet relativiste visible parce que les densités de charges dans un métal sont énormes ($\sim 10^{28} \text{ e}^-/\text{m}^3$) : la neutralité se brise à 10^{-23} près, mais multipliée par 10^{28} ...

18.6 Potentiels retardés, Liénard–Wiechert, rayonnement

En jauge de Lorenz, $\square A^\nu = \mu_0 j^\nu$: c'est le chapitre 9. La fonction de Green *retardée* du d'Alembertien en dimension $3+1$,

$$G_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right), \quad (18.8)$$

(support *sur* le cône de lumière : principe de Huygens) donne par convolution (chap. 4) les *potentiels retardés* :

$$A^\nu(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j^\nu\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}, \mathbf{y}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3y. \quad (18.9)$$

Application physique

Larmor et le synchrotron. Pour une charge ponctuelle, (18.9) donne les potentiels de Liénard–Wiechert, et le champ de rayonnement (en $1/r$) conduit à la puissance de Larmor relativiste $P = \frac{q^2\gamma^6}{6\pi\epsilon_0 c^3} [\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2/c^2]$. Sur une orbite circulaire, $P \propto \gamma^4/R^2$: c'est pourquoi le LEP ($e^\pm$, $\gamma \sim 2 \times 10^5$) perdait $\sim 3 \text{ GeV}$ par tour et pourquoi le LHC utilise des protons (γ 2000 fois plus petit à énergie égale : 10^{13} fois moins de rayonnement). Même formule, autre lecture : la lumière synchrotron, concentrée dans le cône $1/\gamma$ de l'exemple 18.11, est la source de rayons X la plus brillante disponible (SOLEIL, ESRF).

Attention — piège classique

La fonction de Green *avancée* $G_{\text{av}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(t + |\mathbf{x}|/c)$ résout aussi $\square G = \delta$: le choix retardé est un choix de *conditions aux limites* (causalité), pas une conséquence des équations. C'est le même choix qui, au chapitre 15, rend la susceptibilité analytique dans le demi-plan supérieur (Kramers–Kronig) : causalité = analyticité, dans les deux contextes.

Au notebook comp  gnon

TD 18. Diagramme de Minkowski *animé* (boost variable : axes, simultanéité, invariance de l'hyperbole) ; champ d'une charge boostée (*animation* de l'aplatissement $1/\gamma$ des lignes de champ,   q. (18.7)) ; effet Compton : $E'_\gamma(\theta)$ et vérification de (18.4) ; puissance synchrotron $\propto \gamma^4$. Ajustement de γ optimal par `optimizr.differential_evolution` sur la perte par tour.

18.7 Exercices corrigés**Exercice 18.1 (  ) — Composition des vitesses**

Un vaisseau à $0,8c$ tire un projectile à $0,8c$ vers l'avant. Vitesse du projectile pour l'observateur fixe ? Et avec dix étages de $0,8c$?

Solution détaillée

$\beta = \frac{0,8+0,8}{1+0,64} = \frac{1,6}{1,64} = 0,9756$. Avec les rapidités : $\varphi = \text{artanh}(0,8) = 1,0986$, dix étages $\Rightarrow \varphi_{10} = 10,986$, $\beta_{10} = \tanh(10,986) = 1 - 6 \times 10^{-10}$: on approche c exponentiellement sans jamais l'atteindre — la structure de groupe (addition des rapidités, th  m. 18.4) rend le calcul trivial.

Exercice 18.2 (   ) — Invariants du champ

Une onde plane a $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, $E = cB$. Peut-on trouver un référentiel où le champ est purement électrique ? Purement magnétique ? Et pour le champ d'un condensateur ($\mathbf{B} = 0$) ?

Solution détaillée

Les deux invariants de l'onde sont nuls : $B^2 - E^2/c^2 = 0$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Un champ purement électrique aurait $B'^2 - E'^2/c^2 = -E'^2/c^2 < 0 \neq 0$: impossible ; de même purement magnétique (> 0) : l'onde reste une onde dans tous les référentiels. Pour le condensateur : $B^2 - E^2/c^2 < 0$; on peut annuler $\mathbf{B}'$ (déjà nul) mais jamais $\mathbf{E}'$; réciproquement un champ purement magnétique (aimant) ne peut jamais devenir purement électrique. Le signe de $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ trie les champs en trois classes non communicantes.

Exercice 18.3 (   ) — Effet Doppler relativiste

  tablir $\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta)$ à partir de l'invariance de la phase $k_\mu x^\mu$, et retrouver le décalage transverse ($\theta = 90^\circ$).

Solution détaillée

La phase $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_\mu x^\mu$ est un scalaire (nombre de crêtes comptées : invariant). Donc $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ est un quadrivecteur ; le boost (18.2) sur k^0 donne $\omega' = \gamma(\omega - vk_x) = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta)$. À $\theta = 90^\circ$: $\omega' = \gamma\omega > \omega$ — décalage *transverse*, pur effet de dilatation du temps, sans analogue classique ; mesuré par Ives–Stilwell (1938) sur des raies de l'hydrogène, précision moderne 10^{-8} (piégeage d'ions). C'est l'effet qui décale le fond diffus cosmologique en dipôle ($v_\odot \approx 370$ km/s).

Exercice 18.4 (★★★) — Tenseur énergie-impulsion et pression de radiation

Le tenseur énergie-impulsion du champ EM est $T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})$. Calculer T^{00} et T^{0i} , puis la pression exercée par une onde plane sur un miroir parfait.

Solution détaillée

(1) $T^{00} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = u$ (densité d'énergie) ; $T^{0i} = \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = S_i/c$ (vecteur de Poynting) : l'énergie et son flux sont les composantes d'un même tenseur — c'est lui qui source la gravitation (mémoire warp, Partie VIII). (2) Pour l'onde plane, $u = \varepsilon_0 E^2$, $|S| = cu$: le flux d'impulsion est $T^{xx} = u$. Miroir parfait : l'onde repart, transfert d'impulsion doublé, $P_{\text{rad}} = 2u = \frac{2I}{c}$. Application numérique : plein soleil $I = 1 \text{ kW/m}^2 \Rightarrow P_{\text{rad}} = 6,7 \mu\text{Pa}$ — d'où les voiles solaires : IKAROS (2010, JAXA), 196 m^2 , poussée $\sim 1,1 \text{ mN}$, première navigation photonique interplanétaire réelle. (Comparer au brevet analysé dans le mémoire compagnon : ici la pression de radiation est *réellement* la force disponible, et elle est micro-newtonienne.)

Annexe A

Le notebook compagnon : mode d'emploi

Le fichier `champs_distributions_lab.ipynb` (kernel `rhftlab`, Python 3.11) accompagne chaque chapitre, y compris la partie D (TD 17 symétries, TD 18 relativité). Chaque TD suit la structure pédagogique « sandwich » : rappel théorique (théorème, équation pivot, démonstration ou schéma), cellule de calcul avec sorties imprimées étiquetées et au moins une figure, puis lecture des résultats et conclusion reliée au chapitre.

Table des TD

TD	Chapitre	Contenu	optimiz-rs
1	1	Intégrale de Gauss par MCMC, concentration $n\mathbf{1}_{[0,1/n]} \rightarrow \delta$ (<i>animation</i>)	mcmc_sample
2	2	Régularisation par convolution (<i>animation</i> $\varepsilon \downarrow$), débruitage vs Kalman	LinearKalmanFilter
3	3	Approximations de δ (<i>animation</i>), $H' = \delta$, Sokhotski–Plemelj	—
4	4	Green de l'oscillateur amorti, Duhamel numérique, noyau d'impact Hawkes	simulate_hawkes
5	5	FFT vs dictionnaire, aliasing (<i>animation</i>), spectre du fBm, Hurst	fourier_invert, simulate_fbm, estimate_hurst
6	6	Transport et Burgers (<i>animations</i>), temps de choc, Godunov	differential_evolution
7	7	Poisson 2D, multipôles, moyenne par marches aléatoires	poisson_2d_zero_boundary
8	8	Noyau de la chaleur (<i>animation</i>), Fokker–Planck double puits, Kramers, Metropolis	fokker_planck_constant, mcmc_sample
9	9	Chaleur vs ondes vs Schrödinger (<i>animation</i> comparée), étalement $\sigma(t)$	grid_search
10	10	Ising 1D exact vs MCMC, $\xi(T)$, Ising 2D (<i>animation</i> des clusters), Binder	mcmc_sample
11	11	Champ gaussien spectral 1D/2D (<i>animation</i> $m \rightarrow 0$), Wick 4 points, corde	—
12	12	Laplace/Stirling, ϕ^4 0D : série divergente (<i>animation</i>), Bogoliubov, Borel	differential_evolution
13	13	Spectre par matrice de transfert, corrélateur euclidien MCMC, instantons (<i>animation</i>)	mcmc_sample
14	14	Bose/Fermi (<i>animation</i> en T), condensation, Bogoliubov, signe fermionique	—
15	15	FDT sur Langevin (<i>animation</i>), règle de somme Drude, violation Hawkes	simulate_hawkes, hurst_exponent_py
16	16	Flot RG Ising 1D (cobweb <i>animé</i>), flot de Wilson–Fisher <i>animé</i> , data collapse	differential_evolution
17	17	Modes normaux de X_3 classés par les caractères de D_3 (<i>animation</i> du mode E), chapeau mexicain : Goldstone $\omega = 0$ vérifié (<i>animation</i>)	differential_evolution
18	18	Diagramme de Minkowski <i>animé</i> , champ d'une charge boostée (<i>animation</i> $1/\gamma$), Compton, loi synchrotron	differential_evolution

Reproductibilité. Toutes les cellules sont autonomes (imports et graines aléatoires locales); les animations sont produites avec `matplotlib.animation.PillowWriter` et sauvegardées dans `figures/` au format GIF; les figures statiques en PNG (dpi 110). L'exécution complète du notebook prend quelques minutes sur une machine de bureau.

Bibliographie

- [1] F. Golse, *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*, cours de l'École polytechnique MAT431 (2012).
- [2] P. Simon, *Théorie statistique des champs, ou quelques applications de l'intégrale fonctionnelle*, notes de cours (2010).
- [3] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann (1966).
- [4] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer (1983).
- [5] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I : Functional Analysis*, Academic Press (1980).
- [6] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 4^e éd., Oxford (2002).
- [7] J. W. Negele, H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, Westview (1998).
- [8] A. Altland, B. Simons, *Condensed Matter Field Theory*, 2^e éd., Cambridge (2010).
- [9] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill (1965).
- [10] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, 5^e éd., World Scientific (2009).
- [11] P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*, Cambridge (1995).
- [12] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Westview (1992).
- [13] R. Kubo, *Statistical-mechanical theory of irreversible processes I*, J. Phys. Soc. Jpn. **12** (1957) 570.
- [14] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2^e éd., AMS (2010).
- [15] R. Strichartz, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, World Scientific (2003).
- [16] L. Onsager, *Crystal statistics I : a two-dimensional model with an order-disorder transition*, Phys. Rev. **65** (1944) 117.
- [17] B. Mandelbrot, J. van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Rev. **10** (1968) 422.
- [18] F. Black, M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Political Economy **81** (1973) 637.
- [19] J.-B. Zuber, *Symétries en physique*, cours 4P066, Master de Sciences et Technologies, UPMC (2014).
- [20] A. Comtet, *Relativité et électromagnétisme*, notes de cours (rédaction F. Bolgar), Université Paris-Sud.
- [21] P. Aurenche, J.-Ph. Guillet, E. Pilon, *QED, QCD en pratique*, cours de 3^e cycle, LAPTh (2016), cel-01440544.