

Cours I — De l'analyse à la théorie des distributions

Prérequis et analyse des distributions (chapitres 1–5)

HFThot Research Lab

d'après F. Golse (POLY431, École polytechnique) et P. Simon (Théorie statistique des champs)

Juillet 2026

Présentation

Partie I du cours *Des distributions à la théorie statistique des champs*. Elle construit l'analyse des distributions à partir de zéro : calcul différentiel et intégration, fonctions test et régularisation, distributions, convolution et solutions élémentaires, transformation de Fourier et distributions tempérées. Chaque chapitre se termine par des exercices corrigés gradués.

Table des matières

1	Calcul différentiel et intégration : le socle	1
1.1	Multi-indices et notations de Schwartz	1
1.2	Les trois théorèmes de convergence de Lebesgue	2
1.3	Coordonnées polaires et l'intégrale gaussienne	3
1.4	Intégration par parties et formule de Green	4
1.5	Espaces L^p et inégalités de Hölder–Minkowski	4
1.6	Exemples physiques approfondis	5
1.7	Exercices corrigés	5
2	Fonctions test et régularisation	7
2.1	La fonction plateau fondamentale	7
2.2	Convolution des fonctions	8
2.3	Régularisation : le théorème d'approximation	9
2.4	Partitions de l'unité	9
2.5	Exemples physiques approfondis	10
2.6	Exercices corrigés	11
3	Les distributions : définitions, exemples, calcul	13
3.1	Définition et critère de continuité	13
3.2	Le bestiaire fondamental	13
3.3	Convergence des suites de distributions	14
3.4	Dérivation des distributions	15
3.5	Support, localisation, recollement	16
3.6	Exemples physiques approfondis	17
3.7	Exercices corrigés	18
4	Convolution des distributions et solutions élémentaires	21
4.1	Distributions à support compact	21
4.2	Produit tensoriel de distributions	21
4.3	Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$	22
4.4	Solutions élémentaires : le principe général	22
4.5	Exemples physiques approfondis	24
4.6	Exercices corrigés	24
5	Transformation de Fourier et distributions tempérées	27
5.1	La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	27
5.2	Distributions tempérées	28
5.3	Formule sommatoire de Poisson et échantillonnage	29
5.4	Espaces de Sobolev par Fourier	30
5.5	Exemples physiques approfondis	30
5.6	Exercices corrigés	31

Chapitre 1

Calcul différentiel et intégration : le socle

Ce chapitre rassemble *tout* ce que les deux polys supposent connu sans le redire : multi-indices, formule de Leibniz, théorèmes de convergence de Lebesgue, intégrales à paramètre, coordonnées polaires et gaussiennes. Rien n'y est difficile, mais tout y est utilisé des dizaines de fois dans la suite. Un lecteur pressé peut le parcourir et y revenir à la demande.

Prérequis / rappel

On suppose connus : la topologie élémentaire de $\mathbb{R}^N$ (ouverts, fermés, compacts ; un compact de $\mathbb{R}^N$ est un fermé borné), la continuité et la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables, et l'intégrale de Lebesgue (au niveau « admis » : on rappellera précisément les trois théorèmes de convergence dont on se sert).

1.1 Multi-indices et notations de Schwartz

L'analyse à plusieurs variables devient illisible sans une notation compacte pour les dérivées partielles itérées. Laurent Schwartz a popularisé celle-ci :

Définition 1.1 (Multi-index). Un *multi-index* est un N -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$. On pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N \quad (\text{longueur}), \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N},$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}.$$

On écrit $\beta \leq \alpha$ lorsque $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout i , et alors $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Exemple 1.2 (Trois lectures d'un même symbole). En dimension $N = 3$ avec $\alpha = (2, 0, 1)$:

$$|\alpha| = 3, \quad x^\alpha = x_1^2 x_3, \quad \partial^\alpha f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3}.$$

Le laplacien s'écrit $\Delta = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 = \sum_{|\alpha|=2, \alpha=2e_i} \partial^\alpha$; le développement de Taylor à l'ordre m prend la forme compacte

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^m).$$

Proposition 1.3 (Formule de Leibniz multidimensionnelle). *Si $f, g \in C^{|\alpha|}$ au voisinage de x , alors*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g. \quad (1.1)$$

Démonstration. **(1)** Pour $N = 1$ c'est la récurrence classique sur $\alpha \in \mathbb{N}$: vraie pour $\alpha = 1$ (règle du produit), et si elle vaut pour α , on dérive une fois de plus et on regroupe avec la relation de Pascal $\binom{\alpha}{\beta-1} + \binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha+1}{\beta}$. **(2)** Pour N quelconque, on applique le cas unidimensionnel successivement dans chaque variable : les dérivées partielles par rapport à des variables distinctes commutent (théorème de Schwarz, licite car $f, g \in C^{|\alpha|}$), et les coefficients binomiaux se multiplient variable par variable, ce qui donne exactement $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i}$. $\square$

Attention — piège classique

La formule (1.1) exige que *les deux* facteurs soient dérivables. Au chapitre 3, on définira $\partial^\alpha(fT)$ pour $f \in C^\infty$ et T distribution : la *même* formule restera vraie, mais il faudra la *redémontrer* par dualité — on ne peut pas « dériver » une distribution point par point.

1.2 Les trois théorèmes de convergence de Lebesgue

Toute la théorie des distributions repose sur des passages à la limite sous l'intégrale. Les trois énoncés suivants sont utilisés sans arrêt.

Théorème 1.4 (Convergence monotone, Beppo Levi). *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^N$, $f_n \uparrow f$ presque partout. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx \quad (\text{valeurs dans } [0, +\infty]).$$

Théorème 1.5 (Convergence dominée, Lebesgue). *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers f , et supposons qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. pour tout n . Alors $f \in L^1$ et*

$$\int f_n dx \longrightarrow \int f dx, \quad \text{et même} \quad \int |f_n - f| dx \rightarrow 0.$$

Théorème 1.6 (Fubini–Tonelli). *Si f est mesurable sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et si l'une des intégrales itérées de $|f|$ est finie, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx \right) dy.$$

Exemple 1.7 (Un usage typique — dérivation sous l'intégrale). Soit $F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2} dx$ pour $t > 0$. Fixons $t_0 > 0$ et h petit ; le taux d'accroissement $\frac{e^{-(t_0+h)x^2} - e^{-t_0x^2}}{h}$ est dominé (théorème des accroissements finis) par $x^2 e^{-\frac{t_0}{2}x^2} \in L^1$, indépendamment de h . La convergence dominée donne alors

$$F'(t) = - \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-tx^2} dx.$$

C'est le mécanisme « dérivation sous le signe somme » que l'on réutilisera pour dériver sous le crochet de dualité au chapitre 3.

Attention — piège classique

Sans domination, tout peut arriver. La suite $f_n(x) = n \mathbf{1}_{[0,1/n]}(x)$ tend vers 0 p.p., mais $\int f_n = 1$ pour tout n : la masse « s'échappe » en se concentrant. Cette suite est précisément une *approximation de la masse de Dirac* : le chapitre 3 donnera un sens rigoureux à $f_n \rightarrow \delta_0$. Le « défaut de convergence dominée » est donc la naissance des distributions.

1.3 Coordonnées polaires et l'intégrale gaussienne

Proposition 1.8 (Coordonnées polaires en dimension N). *Pour f mesurable positive ou intégrable,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{N-1}} f(r\omega) r^{N-1} d\sigma(\omega) dr,$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface sur la sphère unité S^{N-1} , d'aire totale $|S^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$.

Exemple 1.9 (Intégrabilité des puissances — à connaître par cœur). $\int_{|x| \leq 1} \frac{dx}{|x|^a} < \infty \iff a < N$, $\int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^a} < \infty \iff a > N$.

En effet, en polaires les deux intégrales valent $|S^{N-1}| \int r^{N-1-a} dr$ sur $(0, 1)$ resp. $(1, \infty)$. Ce critère décidera de l'intégrabilité locale de la solution élémentaire du laplacien ($|x|^{2-N}$, localement intégrable car $2 - N > -N$) au chapitre 7.

Théorème 1.10 (Intégrale de Gauss).

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \text{et pour } a > 0, b \in \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}. \quad (1.2)$$

Démonstration. (1) Posons $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$. Par Fubini–Tonelli (intégrande positive), $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. (2) En polaires, $I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$, d'où $I = \sqrt{\pi}$ ($I > 0$). (3) Pour la forme générale, on complète le carré : $-ax^2 + bx = -a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2}{4a}$; le changement de variable $u = \sqrt{a}(x - \frac{b}{2a})$ (pour b réel; pour b complexe on décale le contour, licite car e^{-au^2} décroît uniformément dans une bande horizontale — c'est un argument d'holomorphic que l'on détaillera au chapitre 5) donne le résultat. $\square$

Idée-clé

La formule (1.2) est *l'atome* de toute la partie C. L'intégrale fonctionnelle gaussienne du chapitre 11 n'est rien d'autre que (1.2) répétée dans chaque direction propre d'un opérateur : pour une matrice symétrique définie positive A ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}x^\top A x + j^\top x} d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}j^\top A^{-1}j}.$$

Le passage $n \rightarrow \infty$ (déterminants fonctionnels, propagateurs) est le cœur de la théorie des champs. Retenez le triptyque : *compléter le carré — diagonaliser — compter les modes*.

Application finance / signal

En finance quantitative, la même intégrale gaussienne donne le prix Black–Scholes [18] : l'espérance $\mathbb{E}[e^{\sigma W_T} f(S_T)]$ sous mesure risque-neutre est une intégrale gaussienne en $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$, que l'on évalue en complétant le carré — exactement l'étape (3) de la preuve ci-dessus. Le TD 1 du notebook vérifie numériquement (1.2) et son extension matricielle

par échantillonnage Monte-Carlo (`optimizr.mcmc_sample`).

1.4 Intégration par parties et formule de Green

Théorème 1.11 (Intégration par parties dans $\mathbb{R}^N$). Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ dont l'une est à support compact. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_{x_i} f g \, dx = - \int_{\mathbb{R}^N} f \partial_{x_i} g \, dx. \quad (1.3)$$

Plus généralement, sur un ouvert borné Ω à bord C^1 de normale extérieure n ,

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} f g \, dx = \int_{\partial\Omega} f g n_i \, d\sigma - \int_{\Omega} f \partial_{x_i} g \, dx. \quad (1.4)$$

Démonstration. **(1)** (1.3) : par Fubini, on intègre d'abord en x_i ; sur chaque droite, $\int_{\mathbb{R}} (fg)' \, dx_i = 0$ car fg est à support compact, d'où $\int (f'g + fg') \, dx_i = 0$. **(2)** (1.4) découle du théorème de la divergence $\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma$ appliqué au champ $F = (0, \dots, fg, \dots, 0)$ (i -ième composante). Le théorème de la divergence est admis ici ; il est démontré par partition de l'unité et redressement local du bord (Golse, appendice du ch. 3), technique que l'on présentera au chapitre 2. $\square$

Corollaire 1.12 (Formule de Green). Pour $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Intuition

L'intégration par parties est la *machine à transférer les dérivées*. Toute la théorie des distributions est fondée sur ce transfert : quand T n'est pas dérivable, on définit $\langle \partial T, \varphi \rangle := -\langle T, \partial \varphi \rangle$ en s'appuyant sur (1.3) — la dérivée est envoyée sur la fonction test, qui est infiniment lisse et encaisse tout. La formule de Green, elle, engendrera la *formule des sauts* et les fonctions de Green du chapitre 7.

1.5 Espaces L^p et inégalités de Hölder–Minkowski

Définition 1.13. Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables telles que $\|f\|_{L^p} = (\int_{\Omega} |f|^p)^{1/p} < \infty$; L^∞ est l'espace des fonctions essentiellement bornées. On note p' l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.14 (Hölder puis Minkowski). (i) Si $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ alors $fg \in L^1$ et $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$. (ii) $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$: $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme.

Démonstration. **(1)** Concavité du logarithme (inégalité de Young) : pour $a, b \geq 0$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$. En effet, si $ab > 0$, $\log(ab) = \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{p'} \log b^{p'} \leq \log(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'})$. **(2)** On normalise $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{p'}} = 1$ et on intègre l'inégalité de Young point par point : $|fg| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Le cas général suit par homogénéité. **(3)** Minkowski : $|f + g|^p \leq |f + g|^{p-1}(|f| + |g|)$; on applique Hölder à chacun des deux termes avec les exposants (p, p') , en notant que $(p-1)p' = p$; on divise par $\|f + g\|_{L^{p'}}^{p-1} = \|f + g\|_{L^p}^{p-1}$ (si non nul, sinon rien à démontrer). $\square$

Exemple 1.15 (Emboîtement sur un domaine borné). Si $|\Omega| < \infty$ et $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec $\|f\|_{L^q} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}$: appliquer Hölder à $|f|^q \cdot 1$ avec l'exposant p/q . Sur $\mathbb{R}^N$ tout entier, aucune inclusion n'a lieu : $|x|^{-N/p} \mathbf{1}_{|x| \leq 1}$ est dans L^q pour $q < p$ mais pas dans L^p ; l'inverse à l'infini.

Au notebook compagnon

TD 1 du notebook — vérification numérique de l'intégrale de Gauss par MCMC (`optimizr.mcmc_sample`), convergence $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ de Monte-Carlo, et visualisation *animée* de la concentration $n\mathbf{1}_{[0,1/n]} \rightarrow \delta_0$ — première rencontre avec la masse de Dirac, avant sa définition rigoureuse au chapitre 3.

1.6 Exemples physiques approfondis

Exemple 1.16 (La loi de Gauss de l'électrostatique, ou le théorème de la divergence au travail). Le champ d'une charge ponctuelle q à l'origine est $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$. **(1)** Flux à travers une sphère de rayon R : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$, *indépendant de R* — la décroissance en $1/r^2$ compense exactement la croissance de l'aire en r^2 : c'est la signature géométrique de la conservation du flux en dimension 3. **(2)** Pour une surface S quelconque ne contenant pas la charge, le théorème de la divergence donne $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x = 0$ car $\nabla \cdot (\hat{r}/r^2) = 0$ hors de l'origine (calcul direct en coordonnées sphériques : $\frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \cdot r^{-2}) = 0$). **(3)** Toute l'information est donc *concentrée à l'origine* : le champ de vecteurs $\hat{r}/r^2$ a une divergence nulle partout où elle est définie, mais un flux non nul à travers toute surface englobante. Aucune fonction ne peut faire cela — il faudra une *distribution* : on montrera au chapitre 7 que $\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} = \delta_0$, c'est-à-dire $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ avec $\rho = q\delta_0$: la première équation de Maxwell (écrite en covariant au chapitre 18, thm. 18.10). Ce chapitre-ci fournit l'outil (divergence, flux) ; le chapitre 3 fournira l'objet (δ).

Exemple 1.17 (L'intégrale gaussienne au travail : la distribution de Maxwell–Boltzmann). Dans un gaz à température T , les vitesses suivent la densité $f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-m|\mathbf{v}|^2/2k_B T}$ — une gaussienne à trois dimensions, dont toute la phénoménologie sort de l'intégrale de Gauss (1.2) et de ses dérivées par rapport au paramètre. **(1)** Normalisation : produit de trois gaussiennes 1D, chacune donnant $\sqrt{2\pi k_B T/m}$. **(2)** Vitesse quadratique moyenne : $\langle v_x^2 \rangle = -2 \frac{\partial}{\partial(m/k_B T)} \log \int e^{-mv_x^2/2k_B T} dv_x = \frac{k_B T}{m}$, d'où $\langle |\mathbf{v}|^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}$ et l'équipartition $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$: pour N_2 à 300 K, $v_{\text{rms}} = \sqrt{3k_B T/m} \approx 517$ m/s. **(3)** Distribution du *module* : passage en sphériques (jacobien $4\pi v^2$) : $F(v) = 4\pi v^2 f(v)$, maximum en $v_p = \sqrt{2k_B T/m}$; le facteur v^2 — pur effet de volume des coquilles sphériques — déplace le maximum loin de $v = 0$ bien que chaque composante soit centrée. **(4)** Application : le flux d'effusion par un petit trou, $\Phi = \frac{1}{4}n\langle v \rangle$ avec $\langle v \rangle = \sqrt{8k_B T/\pi m}$ (intégrale gaussienne avec poids v^3) : c'est la formule qui calibre les jets moléculaires et les pompes à vide. Le même calcul gaussien, transposé aux *champs* (chap. 11), donnera le théorème de Wick.

1.7 Exercices corrigés

Exercice 1.1 (*) — Leibniz en pratique

Calculer $\partial^\alpha(x^\beta)$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, puis $\partial^{(2,1)}(x_1^2 x_2 e^{x_1})$ en dimension 2.

Solution détaillée

(1) Variable par variable, $\partial_{x_i}^{\alpha_i} x_i^{\beta_i} = \frac{\beta_i!}{(\beta_i - \alpha_i)!} x_i^{\beta_i - \alpha_i}$ si $\alpha_i \leq \beta_i$, 0 sinon. Donc $\partial^\alpha x^\beta = \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha}$ si $\alpha \leq \beta$, 0 sinon ; en particulier $\partial^\alpha x^\alpha = \alpha!$ — la normalisation qui rend la formule de Taylor si propre. **(2)** Leibniz en x_1 (avec $f = x_1^2$, $g = e^{x_1}$, la variable x_2 ne portant qu'une dérivée sur x_2) : $\partial_{x_2}(x_1^2 x_2 e^{x_1}) = x_1^2 e^{x_1}$, puis $\partial_{x_1}^2(x_1^2 e^{x_1}) = (x_1^2 + 4x_1 + 2)e^{x_1}$. Résultat : $(x_1^2 + 4x_1 + 2)e^{x_1}$.

Exercice 1.2 (★★) — Les moments gaussiens

Montrer que pour $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2k-1)!!}{(2a)^k}, \quad (2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1).$$

En déduire le *théorème de Wick gaussien* en dimension 1 : $\mathbb{E}[X^{2k}] = (2k-1)!! \sigma^{2k}$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Solution détaillée

(1) Dérivons k fois $\int e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$ par rapport à a (licite par convergence dominée, cf. exemple 1.7) : chaque dérivée descend un facteur $-x^2$, donc $\int x^{2k} e^{-ax^2} dx = (-1)^k \frac{d^k}{da^k} \sqrt{\pi/a}$.

(2) Or $\frac{d^k}{da^k} a^{-1/2} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} a^{-1/2-k}$, d'où la formule. (3) Avec $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ et la normalisation $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$, on trouve $\mathbb{E}[X^{2k}] = (2k-1)!! \sigma^{2k}$. Le facteur $(2k-1)!!$ compte exactement les *appariements* de $2k$ objets : c'est le germe du théorème de Wick et des diagrammes de Feynman (chapitre 12). ✓

Exercice 1.3 (★★) — Convergence dominée en action

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 + \frac{x}{n})^{-n} \sin(x/n) dx$.

Solution détaillée

(1) Convergence ponctuelle : $(1 + x/n)^{-n} \rightarrow e^{-x}$ et $\sin(x/n) \rightarrow 0$, donc l'intégrande tend vers 0 p.p. (2) Domination : pour $n \geq 2$, $(1 + x/n)^{-n} \leq (1 + x/2)^{-2}$ (la suite $n \mapsto (1 + x/n)^n$ croît), et $|\sin(x/n)| \leq 1$; or $(1 + x/2)^{-2} \in L^1(0, \infty)$. (3) Le théorème 1.5 conclut : la limite vaut $\boxed{0}$.

Exercice 1.4 (★★★) — Aire de la sphère et fonction Γ

En calculant $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx$ de deux façons, prouver $|S^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$. En déduire le volume de la boule unité et son comportement quand $N \rightarrow \infty$.

Solution détaillée

(1) Par Fubini, $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx = (\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt)^N = \pi^{N/2}$. (2) En polaires, la même intégrale vaut $|S^{N-1}| \int_0^\infty e^{-r^2} r^{N-1} dr = |S^{N-1}| \cdot \frac{1}{2} \Gamma(N/2)$ (poser $u = r^2$). (3) Donc $|S^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$ et $|B_1| = \frac{|S^{N-1}|}{N} = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)}$. (4) Par Stirling, $|B_1| \sim \frac{1}{\sqrt{N\pi}} \left(\frac{2\pi e}{N}\right)^{N/2} \rightarrow 0$ *super-exponentiellement* : en grande dimension, tout le volume d'une boule se concentre près de sa surface. Ce phénomène de *concentration de la mesure* est la raison profonde pour laquelle la méthode du point col (chapitre 12) devient *exacte* dans la limite thermodynamique. ✓

Chapitre 2

Fonctions test et régularisation

Les distributions seront définies par dualité contre des *fonctions test* : infiniment dérivables et à support compact. Ce chapitre construit ces fonctions (leur existence n'a rien d'évident !), puis développe l'outil le plus utile de toute l'analyse : la *régularisation par convolution*, qui permet d'approcher n'importe quelle fonction raisonnable par des fonctions C^∞ .

Prérequis / rappel

Le *support* d'une fonction continue f est $\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ (un fermé). Une fonction est « à support compact » si ce fermé est borné. On rappelle qu'une fonction C^∞ non nulle dont toutes les dérivées s'annulent en un point existe : c'est tout l'objet de la section suivante. Enfin, une fonction analytique (somme de sa série de Taylor) à support compact est *identiquement nulle* — les fonctions test sont donc un phénomène purement C^∞ , non analytique.

2.1 La fonction plateau fondamentale

Lemme 2.1 (La brique de base). *La fonction*

$$\chi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

est C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $\chi^{(k)}(0) = 0$ pour tout k .

Démonstration. **(1)** Sur $t > 0$, une récurrence immédiate montre $\chi^{(k)}(t) = P_k(1/t) e^{-1/t}$ pour un polynôme P_k ($P_0 = 1$, et $P_{k+1}(u) = u^2(P_k(u) - P'_k(u))$). **(2)** Quand $t \rightarrow 0^+$, $u = 1/t \rightarrow +\infty$ et $P_k(u)e^{-u} \rightarrow 0$ (l'exponentielle bat tout polynôme). Donc chaque dérivée se prolonge continûment par 0 en 0. **(3)** On vérifie que le prolongement est bien dérivable en 0 : le taux d'accroissement $\frac{\chi^{(k)}(t)-0}{t} = \frac{1}{t} P_k(1/t) e^{-1/t} \rightarrow 0$, donc $\chi^{(k+1)}(0) = 0$ existe. Récurrence. $\square$

Définition 2.2 (Fonction test ; l'espace C_c^∞). On note $C_c^\infty(\Omega)$ (ou $\mathcal{D}(\Omega)$) l'espace des fonctions C^∞ sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à support compact inclus dans Ω .

Exemple 2.3 (La « bosse » standard).

$$\rho(x) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad C \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1.$$

C'est $\chi(1 - |x|^2)$ à normalisation près, donc C^∞ par composition (lemme 2.1) ; son support est exactement la boule unité fermée. C'est la fonction test canonique — toutes les autres s'en déduisent par translation, dilatation, produit et somme.

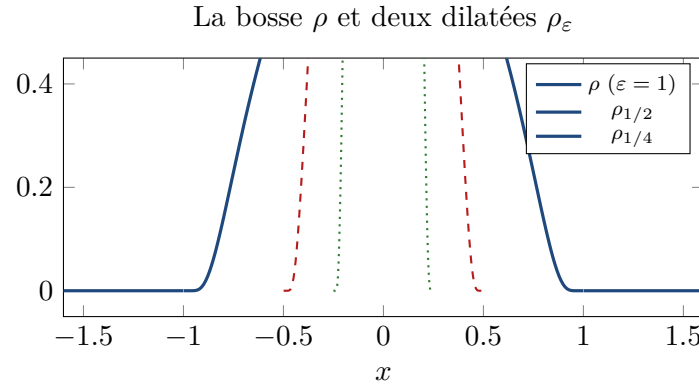


FIGURE 2.1 – Approximation de l’unité : $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \rho(x/\varepsilon)$ concentre la même masse totale 1 dans une boule de rayon ε . À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la suite « tend vers » la masse de Dirac — au sens des distributions du chapitre 3.

2.2 Convolution des fonctions

Définition 2.4 (Produit de convolution). Pour f, g mesurables telles que l’intégrale converge,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x - y) dy.$$

Intuition

$f * g$ est une *moyenne glissante* : la valeur en x est la moyenne des valeurs de f autour de x , pondérée par g retournée et centrée en x . Si $g = \rho_\varepsilon$ (bosse étroite d’intégrale 1), $f * \rho_\varepsilon$ est un « flou gaussien » de rayon ε : on lisse f à l’échelle ε sans déplacer sa masse. En traitement d’image, c’est exactement le *blur* ; en probabilités, la densité d’une somme de variables indépendantes est la convolution des densités ; en physique, la réponse d’un système linéaire invariant par translation est la convolution du signal d’entrée par la *réponse impulsionnelle* — thème central du chapitre 7.

Proposition 2.5 (Propriétés élémentaires). (i) $f * g = g * f$ et $(f * g) * h = f * (g * h)$ quand tout converge. (ii) (Young) Si $f \in L^1$, $g \in L^p$ alors $f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$. (iii) $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$. (iv) Si $f \in C_c^k$ et $g \in L_{\text{loc}}^1$, alors $f * g \in C^k$ et $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$ pour $|\alpha| \leq k$.

Démonstration. **(1)** (i) : changement de variable $y \mapsto x - y$ puis Fubini. **(2)** (ii) : pour $p = 1$, Fubini–Tonelli directement. Pour p général, on écrit $|f(x - y)g(y)| = |f(x - y)|^{1/p'} \cdot |f(x - y)|^{1/p} |g(y)|$ et on applique Hölder ; en élevant à la puissance p et en intégrant en x (Fubini), on obtient la borne. **(3)** (iii) : si $x \notin \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$, alors pour tout y , $f(x - y)g(y) = 0$ (sinon $x - y \in \text{supp } f$ et $y \in \text{supp } g$ donneraient $x \in \text{somme}$). **(4)** (iv) : le taux d’accroissement de $x \mapsto f(x - y)$ est dominé par $\sup |\partial f| \cdot \mathbf{1}_K(y)$ localement (K compact fixe car $\text{supp } f$ compact et x dans un borné) ; convergence dominée. On itère pour $|\alpha| \leq k$. $\square$

Attention — piège classique

Dans (iv), c’est le facteur lisse qui donne sa régularité au produit : $f * g$ est aussi lisse que le meilleur des deux facteurs. C’est un phénomène remarquable — la convolution ne peut que régulariser, jamais dégrader. La contrepartie : elle étale les supports (iii), donc détruit la localisation fine.

2.3 Régularisation : le théorème d'approximation

Théorème 2.6 (Régularisation par convolution). *Soit $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \rho(x/\varepsilon)$ avec ρ la bosse de l'exemple 2.3. Alors :*

1. *si f est continue, $f * \rho_\varepsilon \rightarrow f$ uniformément sur tout compact ;*
2. *si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, alors $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p} \rightarrow 0$;*
3. *$f * \rho_\varepsilon \in C^\infty$ dans tous les cas ($f \in L^1_{\text{loc}}$ suffit).*

Démonstration. (1) Comme $\int \rho_\varepsilon = 1$,

$$(f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x) = \int [f(x-y) - f(x)] \rho_\varepsilon(y) dy = \int_{|y| \leq \varepsilon} [f(x-y) - f(x)] \rho_\varepsilon(y) dy.$$

Sur un compact K , f est uniformément continue sur le 1-voisinage de K : $\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0, |y| \leq \varepsilon_0 \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| \leq \eta$ pour tout $x \in K$. D'où $\sup_K |f * \rho_\varepsilon - f| \leq \eta$ dès que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. (2) Même calcul avec l'inégalité intégrale de Minkowski : $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \sup_{|y| \leq \varepsilon} \|\tau_y f - f\|_{L^p}$, où $\tau_y f = f(\cdot - y)$. La continuité des translations dans L^p ($\|\tau_y f - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow 0$; on l'établit en approchant f par une fonction continue à support compact, dense dans L^p) conclut. (3) C'est la proposition 2.5(iv) appliquée avec le facteur lisse $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty$, itérée à tout ordre. $\square$

Corollaire 2.7 (Densité). *$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \leq p < \infty$, et dans C_c^0 pour la norme uniforme.*

Démonstration. Tronquer ($f \mathbf{1}_{|x| \leq R}$, convergence dominée) puis régulariser : $(f \mathbf{1}_{|x| \leq R}) * \rho_\varepsilon$ est C^∞ à support compact (prop. 2.5(iii)) et approche f en norme L^p . $\square$

Exemple 2.8 (Régulariser une marche d'escalier). Soit $H = \mathbf{1}_{[0, \infty)}$ la fonction de Heaviside. Alors

$$(H * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{-\infty}^x \rho_\varepsilon(u) du$$

est une « marche lissée » : elle vaut 0 pour $x \leq -\varepsilon$, 1 pour $x \geq \varepsilon$, et monte de façon C^∞ entre les deux. Sa dérivée est exactement ρ_ε — une bosse concentrée. À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$: la dérivée de la marche est « la bosse infiniment concentrée », c'est-à-dire la masse de Dirac. Le chapitre suivant transformera cette phrase en théorème ($H' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'$).

Application physique

En physique du solide, remplacer un potentiel en créneau par sa version régularisée $V * \rho_\varepsilon$ est le geste standard pour donner un sens aux équations du mouvement ; en théorie des champs, la régularisation ρ_ε est un *cut-off ultraviolet* : elle supprime les fluctuations d'échelle inférieure à ε . Le flot des constantes de couplage quand ε varie est le *groupe de renormalisation* (aperçu au chapitre 12).

2.4 Partitions de l'unité

Théorème 2.9 (Partition de l'unité). *Soit K compact recouvert par des ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Alors il existe $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, telles que*

$$\sum_{j=1}^m \psi_j = 1 \text{ sur un voisinage de } K, \quad 0 \leq \sum_j \psi_j \leq 1 \text{ partout.}$$

Démonstration. (1) Pour chaque $x \in K$, choisissons une boule fermée $\overline{B}(x, r_x) \subset \Omega_{j(x)}$. Par compacité, un nombre fini de boules ouvertes $B_i = B(x_i, r_i)$ recouvre K . (2) Pour chaque i , l'exemple 2.3 translaté-dilaté fournit $\theta_i \in C_c^\infty(B(x_i, 2r_i))$ avec $0 \leq \theta_i \leq 1$ et $\theta_i = 1$ sur $\overline{B}_i$ (prendre la bosse composée avec une rampe : $\theta_i = \chi_{\text{rampe}}(|x - x_i|)$, construite en convolant l'indicatrice de $B(x_i, \frac{3}{2}r_i)$ par $\rho_{r_i/4}$). Quitte à réduire r_i , $\text{supp } \theta_i \subset \Omega_{j(x_i)}$. (3) Posons $\psi'_1 = \theta_1$, $\psi'_i = \theta_i \prod_{k < i} (1 - \theta_k)$. Par récurrence, $\sum_{i \leq m} \psi'_i = 1 - \prod_{i \leq m} (1 - \theta_i)$; sur K , chaque point est dans un B_i où $\theta_i = 1$, donc la somme vaut 1 sur $\bigcup B_i \supset K$, qui est un voisinage ouvert. (4) On regroupe enfin les ψ'_i par indice $j(x_i)$ commun : $\psi_j = \sum_{i: j(x_i)=j} \psi'_i$. $\square$

Idée-clé

La partition de l'unité est le *scotch* de l'analyse : elle découpe tout problème global en morceaux locaux (chacun dans une carte, un ouvert simple) puis recolle les solutions. On l'utilisera pour recoller des distributions (chapitre 3), pour localiser les singularités, et pour définir l'intégrale de surface sur $\partial\Omega$.

Au notebook compagnon

TD 2 du notebook — régularisation *animée* : convolution de la marche de Heaviside et d'un signal bruité par ρ_ε avec ε décroissant (animation GIF), illustration du théorème 2.6 et du compromis lissage/localisation. Le débruitage par convolution est comparé au filtre de Kalman (`optimizr.LinearKalmanFilter`) sur le même signal — moyenne glissante *aveugle* contre estimation *modèle-dépendante*.

2.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 2.10 (Toute mesure est un appariement avec une fonction test : le rayon du proton). Aucun détecteur ne mesure un champ *en un point* : une sonde de taille a mesure la moyenne $\int \rho(x) \varphi_a(x) dx$, où φ_a est le profil de l'appareil — exactement l'appariement $\langle \rho, \varphi \rangle$ qui définira les distributions au chapitre 3. La physique subatomique pousse cette logique à son terme : en diffusion élastique e^-p , l'électron « teste » la densité de charge $\rho(r)$ du proton avec la fonction $e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$ (échange d'un photon d'impulsion $\mathbf{q}$) : la section efficace mesure le *facteur de forme*

$$G_E(q^2) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} d^3x = 1 - \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle + \mathcal{O}(q^4),$$

développement obtenu en développant l'exponentielle sous l'intégrale (moyenne angulaire de $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})^2 = q^2 r^2 / 3$). La pente à l'origine *définit* le rayon de charge : $\langle r^2 \rangle = -6 dG_E/dq^2|_0$. Expérimentalement $G_E(q^2) \approx (1 + q^2/0,71 \text{ GeV}^2)^{-2}$ (forme dipolaire), d'où $r_p \approx 0,84 \text{ fm}$. Moralité : « la densité de charge du proton » n'est *jamais* observée ponctuellement — seule la collection des appariements $\langle \rho, e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \rangle$ l'est, et elle suffit à tout reconstruire : c'est le programme des distributions tempérées du chapitre 5.

Exemple 2.11 (Des champs microscopiques aux champs macroscopiques de Maxwell). Dans la matière, le champ électrique microscopique $\mathbf{e}(x)$ varie de $\sim 10^{11} \text{ V/m}$ sur des ångströms (près des noyaux) à zéro entre les atomes : inutilisable tel quel. Le champ *macroscopique* des équations de Maxwell dans les milieux est le lissé

$$\mathbf{E}(x) = (\mathbf{e} * \varphi_a)(x) = \int \mathbf{e}(y) \varphi_a(x - y) d^3y,$$

où φ_a est une fonction test positive de largeur $a \sim 10 \text{ nm}$: grande devant la maille ($\sim 0,3 \text{ nm}$), petite devant la longueur d'onde ($\sim 500 \text{ nm}$). (1) La linéarité de la convolution transporte les équations de Maxwell microscopiques sur les moyennes ; le terme de polarisation $\mathbf{P}$ naît du

développement multipolaire des charges liées à l'intérieur de φ_a (chap. 7, exemple 7.9). **(2)** Le résultat ne dépend pas du choix précis de φ_a dans la fenêtre d'échelles — exactement la robustesse des suites régularisantes (thm. 2.6) : la physique macroscopique est bien définie *parce que* la limite $\varphi_a \rightarrow \delta$ est indépendante du chemin. **(3)** Contre-exemple instructif : dans un cristal photonique, où la maille est *comparable* à la longueur d'onde, la fenêtre n'existe plus, le moyennage échoue, et il faut garder la structure complète (bandes photoniques, chap. 5, zones de Brillouin) — la frontière de validité d'une théorie effective est celle de sa fonction test.

2.6 Exercices corrigés

Exercice 2.1 (*) — Support de la bosse dilatée

Vérifier que $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-N} \rho(\cdot/\varepsilon)$ satisfait $\int \rho_\varepsilon = 1$, $\text{supp } \rho_\varepsilon = \overline{B}(0, \varepsilon)$, et $\|\partial^\alpha \rho_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon^{-N-|\alpha|} \|\partial^\alpha \rho\|_\infty$.

Solution détaillée

(1) Changement de variable $u = x/\varepsilon$, $dx = \varepsilon^N du$: $\int \rho_\varepsilon = \int \rho = 1$. **(2)** $\rho(x/\varepsilon) \neq 0 \iff |x/\varepsilon| < 1 \iff |x| < \varepsilon$. **(3)** $\partial^\alpha [\rho(x/\varepsilon)] = \varepsilon^{-|\alpha|} (\partial^\alpha \rho)(x/\varepsilon)$ par dérivation en chaîne ; multiplier par ε^{-N} . Ce $\varepsilon^{-N-|\alpha|}$ qui explose est le prix de la concentration : on ne peut pas concentrer *et* garder les dérivées bornées — préfiguration du fait que δ_0 n'est pas une fonction. ✓

Exercice 2.2 (**) — Convolution explicite

Calculer $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$ puis $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$. Que devient la régularité à chaque convolution ? Reconnaître la limite après n convolutions (recentrée-renormalisée).

Solution détaillée

(1) $(\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]})(x) = |[0,1] \cap [x-1, x]|$ vaut x sur $[0,1]$, $2-x$ sur $[1,2]$, 0 ailleurs : c'est la *tente* — continue mais non C^1 . **(2)** Une convolution de plus donne une *spline quadratique* par morceaux sur $[0,3]$, de classe C^1 : $\frac{x^2}{2}$ sur $[0,1]$, $\frac{3}{4} - (x - \frac{3}{2})^2$ sur $[1,2]$, $\frac{(3-x)^2}{2}$ sur $[2,3]$. Chaque convolution gagne un cran de régularité (C^{k-1} pour k facteurs) : illustration directe de la proposition 2.5(iv). **(3)** La densité de la somme $U_1 + \dots + U_n$ de n uniformes indépendantes est la convolée n -uple (spline de B-spline d'ordre n) ; recentrée-renormalisée, elle tend vers la gaussienne — c'est le théorème central limite *vu comme lissage itéré*. ✓

Exercice 2.3 (**) — Fonction plateau

Construire explicitement $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\theta = 1$ sur $\overline{B}(0, 1)$ et $\text{supp } \theta \subset B(0, 2)$.

Solution détaillée

(1) Posons $f = \mathbf{1}_{\overline{B}(0, 3/2)}$ et $\theta = f * \rho_{1/4}$. **(2)** $\theta \in C^\infty$ (prop. 2.5(iv)) ; $\text{supp } \theta \subset \overline{B}(0, 3/2) + \overline{B}(0, 1/4) \subset B(0, 2)$ (iii). **(3)** Pour $|x| \leq 1$: $\theta(x) = \int_{|y| \leq 1/4} \rho_{1/4}(y) \mathbf{1}_{|x-y| \leq 3/2} dy = \int \rho_{1/4} = 1$ car $|x-y| \leq 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$. ✓

Exercice 2.4 (* — Borel : toute série de Taylor est atteinte**

Montrer (théorème de Borel) que pour toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels, il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}(0) = a_k$ pour tout k . *Indication : poser $f(x) = \sum_k \frac{a_k}{k!} x^k \theta(\lambda_k x)$ avec θ plateau valant 1 près de 0 et $\lambda_k \rightarrow \infty$ bien choisis.*

Solution détaillée

(1) Soit $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\theta = 1$ sur $[-1, 1]$, $\text{supp } \theta \subset [-2, 2]$ (exercice 2.3). Posons $u_k(x) = \frac{a_k}{k!} x^k \theta(\lambda_k x)$: chaque u_k est C^∞ , vaut $\frac{a_k}{k!} x^k$ près de 0 (à l'échelle $1/\lambda_k$), et $\text{supp } u_k \subset [-2/\lambda_k, 2/\lambda_k]$. **(2)** Pour $j < k$, la dérivée j -ième est bornée par $\|u_k^{(j)}\|_\infty \leq C_{j,k} \lambda_k^{j-k}$ (chaque facteur x restant apporte un λ_k^{-1} sur le support). En choisissant $\lambda_k \geq 2^k (1 + \max_{j < k} C_{j,k})$, on garantit $\|u_k^{(j)}\|_\infty \leq 2^{-k}$ pour tout $j < k$. **(3)** Alors $\sum_k u_k^{(j)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ pour chaque j (les $k \leq j$ en nombre fini, les $k > j$ sommables) : $f = \sum u_k \in C^\infty$ et on peut dériver terme à terme. **(4)** En 0 : $u_k^{(j)}(0) = a_k \delta_{jk}$ (le plateau vaut 1 près de 0, donc u_k y coïncide avec le monôme). D'où $f^{(j)}(0) = a_j$. Ce théorème montre que C^∞ est *immensément* plus gros que l'espace des fonctions analytiques : aucune contrainte de croissance ne pèse sur les dérivées en un point. ✓

Chapitre 3

Les distributions : définitions, exemples, calcul

Nous voici au cœur de la partie A. L'idée de Schwartz (1945) tient en une phrase : *ne plus décrire un objet par ses valeurs ponctuelles, mais par ses moyennes contre toutes les fonctions test*. Cette bascule de point de vue — l'objet devient une forme linéaire — autorise à dériver *tout*, indéfiniment, et donne un cadre commun aux fonctions, aux mesures, aux charges ponctuelles, aux dipôles et aux sauts.

Prérequis / rappel

Chapitres 1 et 2 : multi-indices, intégration par parties (1.3), fonctions test $C_c^\infty(\Omega)$, régularisation. On rappelle qu'une forme linéaire T sur un espace vectoriel muni d'une notion de convergence est *continue* si $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ dès que $\varphi_n \rightarrow \varphi$.

3.1 Définition et critère de continuité

Définition 3.1 (Convergence dans $C_c^\infty(\Omega)$). $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $C_c^\infty(\Omega)$ si : (i) il existe un compact fixe $K \subset \Omega$ contenant tous les $\text{supp } \varphi_n$; (ii) pour chaque multi-indice α , $\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformément.

Définition 3.2 (Distribution). Une *distribution* sur Ω est une forme linéaire $T : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ continue au sens précédent. On note $\langle T, \varphi \rangle$ sa valeur et $\mathcal{D}'(\Omega)$ leur espace.

De façon équivalente (critère *quantitatif*) : T est une distribution si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq p_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(K). \quad (3.1)$$

Si un même p convient pour tous les compacts, le plus petit tel p est *l'ordre* de T .

Équivalence des deux définitions. (1) (3.1) $\Rightarrow$ continuité : immédiat, car si $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $C_c^\infty(K)$, le membre de droite tend vers 0. (2) Réciproque par l'absurde : si (3.1) échoue pour un compact K , alors pour chaque n il existe $\varphi_n \in C_c^\infty(K)$ avec $|\langle T, \varphi_n \rangle| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha \varphi_n|$. Normalisons $\psi_n = \varphi_n / (n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha \varphi_n|)$: alors chaque $\sup |\partial^\alpha \psi_n| \leq 1/n \rightarrow 0$ (dès que $n \geq |\alpha|$), donc $\psi_n \rightarrow 0$ dans $C_c^\infty(K)$, mais $|\langle T, \psi_n \rangle| > 1$: contradiction. $\square$

3.2 Le bestiaire fondamental

Exemple 3.3 (Les fonctions localement intégrables). Toute $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ définit

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

C'est une distribution d'ordre 0 : $|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq (\int_K |f|) \sup_K |\varphi|$. L'application $f \mapsto T_f$ est *injective* (si $T_f = 0$ alors $f = 0$ p.p. : régulariser, $f * \rho_\varepsilon(x) = \langle T_f, \rho_\varepsilon(x - \cdot) \rangle = 0$, puis théorème 2.6). On identifie donc $f \equiv T_f$: *les fonctions sont des distributions*.

Exemple 3.4 (La masse de Dirac et ses dérivées).

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \langle \delta_a^{(\alpha)}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(a).$$

δ_a est d'ordre 0 (c'est une mesure : la charge ponctuelle unité en a) ; δ_a' est d'ordre exactement 1 (le *dipôle* ponctuel : deux charges $\pm 1/\varepsilon$ distantes de ε , à la limite). δ_a n'est *pas* une fonction : s'il existait $f \in L^1_{\text{loc}}$ avec $\int f \varphi = \varphi(a)$ pour toute φ , en prenant φ nulle près de a on aurait $f = 0$ p.p. hors de a , donc $T_f = 0$, contradiction avec $\varphi(a) \neq 0$.

Exemple 3.5 (La valeur principale de $1/x$). $1/x$ n'est pas localement intégrable en 0 (exemple 1.9). Mais la *compensation par imparité* sauve l'intégrale :

$$\left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

La limite existe : en écrivant $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) dt$ continue (Taylor avec reste intégral), le terme $\varphi(0) \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{dx}{x} = 0$ par imparité, et il reste $\int_{|x| < R} \psi$, absolument convergente. Le critère (3.1) tient avec $p = 1$: $|\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle| \leq 2R \sup |\varphi'| + \frac{2}{R} \int_{|x| > R} |\varphi|$; $\text{vp} \frac{1}{x}$ est d'ordre exactement 1. Ce prototype de *régularisation d'une divergence* est le geste inaugural de la renormalisation en théorie des champs.

Exemple 3.6 (Peigne de Dirac). $\text{III} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$: la somme est localement finie (sur tout compact, seuls un nombre fini de termes agissent), donc définit une distribution d'ordre 0. C'est l'objet central de l'échantillonnage (théorème de Shannon) et de la formule de Poisson (chapitre 5).

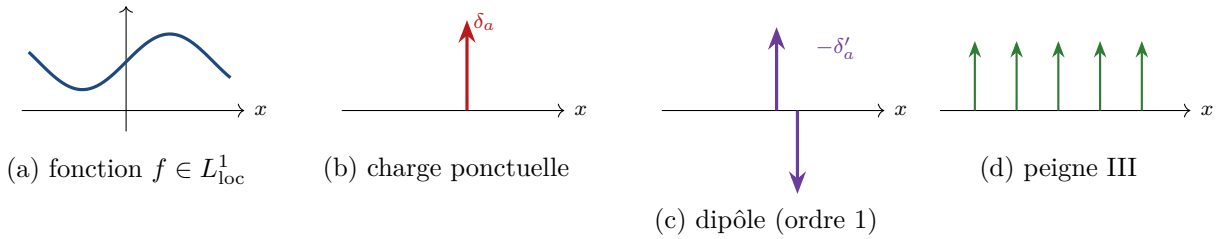


FIGURE 3.1 – Le bestiaire : quatre distributions typiques. Les flèches représentent des masses ponctuelles — objets qui n'ont *pas* de graphe fonctionnel, mais des moyennes bien définies contre toute fonction test.

3.3 Convergence des suites de distributions

Définition 3.7. $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ pour *chaque* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (convergence faible-*, testée fonction par fonction).

Proposition 3.8 (Approximations de l'unité). Si $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-N} \rho(\cdot/\varepsilon)$ avec $\int \rho = 1$, alors $\rho_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{D}'$. Plus généralement, toute suite $(f_n) \subset L^1$ avec $f_n \geq 0$, $\int f_n = 1$ et $\int_{|x| > \eta} f_n \rightarrow 0$ pour tout $\eta > 0$ converge vers δ_0 .

Démonstration. $\langle f_n, \varphi \rangle - \varphi(0) = \int f_n(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx$. On coupe en $|x| \leq \eta$ (où $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \sup_{|x| \leq \eta} |\varphi - \varphi(0)| \rightarrow 0$ par continuité) et $|x| > \eta$ (où l'intégrale de f_n tend vers 0 et φ est bornée). $\square$

Exemple 3.9 (Trois visages de δ_0 , et un piège oscillant). (i) Gaussiennes : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2} \rightarrow \delta_0$ quand $\sigma \rightarrow 0$. (ii) Lorentziennes : $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \rightarrow \delta_0$ — c'est le noyau de Poisson du demi-plan, et la clé de la formule de Sokhotski–Plemelj ci-dessous. (iii) Sinus cardinal : $\frac{\sin(nx)}{\pi x} \rightarrow \delta_0$ *bien que non positif et non intégrable* ! Ici la proposition 3.8 ne s'applique pas : la preuve passe par le lemme de Riemann–Lebesgue et l'intégrale de Dirichlet $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$. Moralité : la convergence vers δ peut être portée par des *oscillations* et non par une concentration positive. (iv) Piège : $n \sin(nx) \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'$ (Riemann–Lebesgue après IPP contre φ) alors que $\sup |n \sin(nx)| \rightarrow \infty$: la convergence distributionnelle *moyenne* les oscillations.

Théorème 3.10 (Sokhotski–Plemelj). Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \mp i\varepsilon} = \text{vp} \frac{1}{x} \pm i\pi \delta_0. \quad (3.2)$$

Démonstration. (1) Décomposons $\frac{1}{x-i\varepsilon} = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} + i \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$. (2) Partie imaginaire : c'est π fois la lorentzienne de l'exemple 3.9(ii), donc $\rightarrow i\pi\delta_0$. (3) Partie réelle : contre φ , on écrit à nouveau $\varphi = \varphi(0) + x\psi$; le terme $\varphi(0) \int \frac{x dx}{x^2+\varepsilon^2} = 0$ par imparité (au sens des intégrales symétriques), et $\int \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2} \psi \rightarrow \int \psi$ par convergence dominée ($\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2} \leq 1$, ψ intégrable à support compact modulo une troncature standard) — soit exactement $\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle$. $\square$

Application physique

(3.2) est la prescription $+i0$ des propagateurs de Feynman : le propagateur retardé $\frac{1}{\omega - \omega_0 + i0}$ se décompose en une partie principale (dispersive, réactive) et $-i\pi\delta(\omega - \omega_0)$ (absorptive, résonante). Les *relations de Kramers–Kronig* qui relient dispersion et absorption dans tout milieu causal sont une paraphrase de Sokhotski–Plemelj — on y reviendra avec la réponse linéaire au chapitre 15.

3.4 Dérivation des distributions

Définition 3.11 (Dérivée distributionnelle). Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle. \quad (3.3)$$

C'est bien une distribution (composer (3.1) avec ∂^α augmente p_K de $|\alpha|$), l'opération est *continue* : $T_n \rightarrow T$ implique $\partial^\alpha T_n \rightarrow \partial^\alpha T$ — un théorème de dérivation terme à terme *gratuit*, inimaginable pour les fonctions. Si $T = T_f$ avec $f \in C^1$, l'intégration par parties (1.3) montre que la définition redonne la dérivée usuelle : le signe $(-1)^{|\alpha|}$ est là précisément pour cette compatibilité.

Théorème 3.12 (Le calcul fondateur : $H' = \delta_0$). La fonction de Heaviside $H = \mathbf{1}_{[0,\infty)}$ vérifie, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$H' = \delta_0.$$

Démonstration. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = -[\varphi]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \quad \square$$

Théorème 3.13 (Formule des sauts, dimension 1). Soit f de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec des sauts $[f]_{a_j} = f(a_j^+) - f(a_j^-)$ aux points $a_1 < \dots < a_m$. Alors

$$f'|_{\mathcal{D}'} = \{f'\} + \sum_{j=1}^m [f]_{a_j} \delta_{a_j}, \quad (3.4)$$

où $\{f'\}$ est la dérivée classique là où elle existe.

Démonstration. On découpe l'intégrale $-\int f\varphi'$ aux points a_j et on intègre par parties sur chaque intervalle (a_j, a_{j+1}) :

$$-\int_{a_j}^{a_{j+1}} f\varphi' = -[f\varphi]_{a_j^+}^{a_{j+1}^-} + \int_{a_j}^{a_{j+1}} \{f'\}\varphi.$$

En sommant, les termes de bord se regroupent par point de découpe : $\varphi(a_j)(f(a_j^+) - f(a_j^-))$, d'où (3.4). $\square$

Exemple 3.14 (Trois dérivations expresses). (i) $\frac{d}{dx}|x| = \text{sgn}(x)$ puis $\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta_0$: la valeur absolue est « deux fois dérivable », sa dérivée seconde est une charge 2 à l'origine (courbure concentrée au pli). (ii) $\frac{d}{dx} \log|x| = \text{vp} \frac{1}{x}$: intégrer par parties $-\int \log|x| \varphi'$ en excluant $(-\varepsilon, \varepsilon)$ et vérifier que les termes de bord $\mp \log \varepsilon \varphi(\pm \varepsilon)$ se compensent à la limite (car $\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $\varepsilon \log \varepsilon \rightarrow 0$). (iii) $x\delta'_0 = -\delta_0$ (utiliser (3.5) ci-dessous) : les distributions ponctuelles ont une algèbre non triviale.

Définition 3.15 (Multiplication par une fonction lisse). Pour $a \in C^\infty(\Omega)$:

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle, \quad \text{et Leibniz survit : } \partial(aT) = a\partial T + (\partial a)T. \quad (3.5)$$

Attention — piège classique

On ne peut pas multiplier deux distributions quelconques ($\delta_0 \cdot \delta_0$ n'a pas de sens ; pire, l'exemple de Schwartz montre qu'aucun produit associatif prolongeant celui des fonctions continues n'existe : $(\text{vp} \frac{1}{x} \cdot x) \cdot \delta_0 = \delta_0$ mais $\text{vp} \frac{1}{x} \cdot (x \cdot \delta_0) = 0$). En théorie quantique des champs, les produits de propagateurs au même point sont exactement ces produits interdits : les *divergences ultraviolettes* qui imposent la renormalisation.

3.5 Support, localisation, recollement

Définition 3.16. T est nulle sur l'ouvert $\omega \subset \Omega$ si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$. Le *support* de T est le complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle.

Proposition 3.17 (Recollement). Si $\Omega = \bigcup_i \omega_i$ et si des $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ coïncident sur les intersections, il existe une unique $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qui restreint à chaque T_i .

Démonstration. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, une partition de l'unité (théorème 2.9) subordonnée à un sous-recouvrement fini de $\text{supp } \varphi$ écrit $\varphi = \sum_j \psi_j \varphi$ avec $\psi_j \varphi \in C_c^\infty(\omega_{i(j)})$; on pose $\langle T, \varphi \rangle = \sum_j \langle T_{i(j)}, \psi_j \varphi \rangle$. La cohérence sur les intersections garantit l'indépendance du choix de la partition (différence de deux choix = somme de termes testés sur des intersections, où les T_i coïncident) ; la linéarité et la continuité sont héritées. $\square$

Théorème 3.18 (Distributions à support ponctuel). Si $\text{supp } T \subset \{0\}$, alors T est une combinaison linéaire finie

$$T = \sum_{|\alpha| \leq p} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0,$$

où p est l'ordre (fini) de T .

Schéma de preuve. (1) Une distribution à support compact est d'ordre fini p (le critère (3.1) sur un voisinage compact du support vaut pour toutes les fonctions test, par troncature plateau). (2) Si φ s'annule en 0 ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leq p$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$: on tronque $\varphi_\varepsilon = \varphi \cdot \theta(x/\varepsilon)$ (θ plateau) et on contrôle $\sup |\partial^\alpha \varphi_\varepsilon| = \mathcal{O}(\varepsilon^{p+1-|\alpha|})$ grâce à Taylor — les dérivées du plateau coûtent $\varepsilon^{-|\beta|}$ mais Taylor rapporte ε^{p+1} ; la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ donne 0. (3) Donc T ne dépend que du jet d'ordre p de φ en 0 : c'est une forme linéaire sur les coefficients de Taylor $\{\partial^\alpha \varphi(0)\}_{|\alpha| \leq p}$, soit exactement une combinaison des $\partial^\alpha \delta_0$. (Détails : Golse, th. 4.1.5.) $\square$

Idée-clé

Ce théorème est un résultat de *rigidité* remarquable : à support ponctuel, il n'existe *rien d'autre* que la charge, le dipôle, le quadrupôle... C'est le fondement du *développement multipolaire* de l'électrostatique : vu de loin, toute distribution de charges compacte est asymptotiquement charge + dipôle + quadrupôle + ...

Au notebook compagnon

TD 3 du notebook — animation des approximations de l'unité (gaussienne, lorentzienne, sinus cardinal) convergeant vers δ_0 ; vérification numérique de $H' = \delta_0$ et de la formule des sauts par différences finies contre fonctions test ; illustration de Sokhotski–Plemelj (3.2) avec ε décroissant (animation du contour dans le plan complexe).

3.6 Exemples physiques approfondis

Exemple 3.19 (Densités de charge multipolaires : le dipôle comme dérivée de δ). Deux charges $\pm q$ en $\pm \frac{\mathbf{a}}{2}$, densité $\rho_a = q [\delta_{\mathbf{a}/2} - \delta_{-\mathbf{a}/2}]$. Quand $a \rightarrow 0$ à moment $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$ fixé, pour toute fonction test φ :

$$\langle \rho_a, \varphi \rangle = q \left[\varphi\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{\mathbf{a}}{2}\right) \right] \longrightarrow \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi(0) = \langle -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta_0, \varphi \rangle :$$

le dipôle ponctuel *est* la distribution $-\mathbf{p} \cdot \nabla \delta_0$ — un objet qui n'a aucun sens comme fonction, mais dont l'énergie dans un potentiel extérieur Φ tombe juste : $U = \langle \rho, \Phi \rangle = -\mathbf{p} \cdot \nabla \Phi(0) \cdot (-1) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0)$. ✓ De même le quadrupôle est $\frac{1}{2} Q_{ij} \partial_i \partial_j \delta_0$: la molécule CO_2 (linéaire, symétrique : $\mathbf{p} = 0$ par parité, chap. 17) interagit avec un gradient de champ via $Q_{zz} \approx -14 \times 10^{-40} \text{ C m}^2$ — c'est ce couplage quadrupolaire qui élargit ses raies rotationnelles et contribue à son spectre infrarouge. La hiérarchie multipolaire complète ($\delta, \nabla \delta, \nabla \nabla \delta, \dots$) est le développement de *toute* source localisée vue de loin (chap. 7, exemple 7.9) : les dérivées de δ ne sont pas une curiosité, elles sont la *base* des sources ponctuelles de la physique.

Exemple 3.20 (La prescription $i\varepsilon$ de Feynman : Sokhotski–Plemelj en théorie des champs). En théorie quantique des champs, le propagateur d'une particule de masse m s'écrit $\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$: le $i\varepsilon$ n'est pas un détail technique, c'est *toute* la structure causale. La formule de Sokhotski–Plemelj (3.2),

$$\frac{1}{x \mp i\varepsilon} = \text{vp} \frac{1}{x} \pm i\pi \delta(x),$$

appliquée à $x = p^2 - m^2$, décompose le propagateur en **(a)** une partie principale (propagation *virtuelle*, hors couche de masse) et **(b)** un terme $-i\pi \delta(p^2 - m^2)$ concentré sur la couche de masse : les particules *réelles* observables. C'est le théorème optique en germe : la partie imaginaire d'une amplitude de diffusion vers l'avant compte les états finals réels accessibles, $\text{Im} \mathcal{M}(s) \propto \sum_f \delta(s - m_f^2)$ — en pratique, la partie imaginaire du propagateur du photon virtuel dans $e^+e^- \rightarrow$ hadrons « voit » chaque seuil de production ($c\bar{c}$ à 3,77 GeV, $b\bar{b}$ à 10,6 GeV) comme une marche du rapport R (chap. 12, exemple 12.8) : on *mesure* des distributions de Dirac dans les collisionneurs. Le choix du signe $\mp i\varepsilon$ (retardé/avancé/Feynman) est le même choix de conditions aux limites que pour les potentiels retardés (chap. 18, §18.6).

3.7 Exercices corrigés

Exercice 3.1 (★) — Ordre du dipôle

Montrer que δ'_0 est d'ordre exactement 1 (pas 0).

Solution détaillée

(1) L'ordre est ≤ 1 par définition ($|\varphi'(0)| \leq \sup |\varphi'|$). (2) S'il était d'ordre 0, on aurait $|\varphi'(0)| \leq C \sup_K |\varphi|$ pour toute $\varphi \in C_c^\infty(K)$. Prenons $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)\theta(x)$ (θ plateau valant 1 près de 0) : $\sup |\varphi_n| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ mais $\varphi'_n(0) = \cos(0) = 1$. Contradiction. ✓

Exercice 3.2 (★★) — Équation $xT = 0$

Résoudre $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, puis $xT = 1$, puis $x^2T = 0$.

Solution détaillée

(1) $xT = 0$: si $\varphi \in C_c^\infty$ s'annule en 0, alors $\varphi = x\psi$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)dt \in C_c^\infty$ (vérifier le support et la régularité) ; donc $\langle T, \varphi \rangle = \langle xT, \psi \rangle = 0$. T ne dépend que de $\varphi(0)$: $T = c\delta_0$. Réciproquement $x\delta_0 = 0$. *Solution générale* : $T = c\delta_0$. (2) $xT = 1$: une solution particulière est $\text{vp} \frac{1}{x}$ (contre $\varphi : \langle x \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim \int_{|x|>\varepsilon} \varphi = \int \varphi$). Solution générale : $T = \text{vp} \frac{1}{x} + c\delta_0$. (3) $x^2T = 0$: en factorisant $x(xT) = 0$, on a $xT = c\delta_0$; or $x(-c\delta'_0) = c\delta_0$ (exemple 3.14(iii)), donc $x(T + c\delta'_0) = 0$ et $T = -c\delta'_0 + c'\delta_0$. *Solution générale* : $T = a\delta_0 + b\delta'_0$: la dimension de l'espace des solutions égale la multiplicité du zéro. Ce calcul est exactement celui qui fixe l'ambiguïté des propagateurs $((\omega^2 - \omega_0^2)\hat{G} = 1$ définit $\hat{G}$ à $a\delta + b\delta'$ près : le choix est la *condition aux limites* — retardé, avancé, Feynman). ✓

Exercice 3.3 (★★) — Dérivée de $\log|x|$ et partie finie

Justifier $(\log|x|)' = \text{vp} \frac{1}{x}$ en détail, puis calculer $(\text{vp} \frac{1}{x})'$ et l'identifier à la « partie finie » — $\text{Pf} \frac{1}{x^2}$ définie par $\langle \text{Pf} \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon} [\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi}{x^2} - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}]$.

Solution détaillée

(1) $\log|x| \in L_{\text{loc}}^1$ (exemple 1.9 : divergence logarithmique intégrable). $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = -\int \log|x| \varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon} \int_{|x|>\varepsilon} \log|x| \varphi'$. (2) IPP sur (ε, ∞) et $(-\infty, -\varepsilon)$: termes de bord $\log \varepsilon [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] = \mathcal{O}(\varepsilon \log \varepsilon) \rightarrow 0$, et il reste $\lim \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi}{x} = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle$. (3) Pour la dérivée seconde, même mécanique : $\langle (\text{vp} \frac{1}{x})', \varphi \rangle = -\lim \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'}{x}$; IPP : $-\left[\frac{\varphi}{x}\right]_{|x|=\varepsilon}^\infty - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi}{x^2}$; le terme de bord vaut $\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon)$, d'où exactement $-\text{Pf} \frac{1}{x^2}$. La « partie finie » de Hadamard soustrait le *contre-terme divergent minimal* : c'est un prototype de renormalisation soustractive. ✓

Exercice 3.4 (★★★) — Limite thermodynamique d'un réseau de charges

Soit $T_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n^2}^{n^2} \delta_{k/n}$. Montrer que $T_n \rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \cdot \lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue... est *faux* ; identifier la vraie limite et le taux de convergence contre $\varphi \in C_c^\infty$.

Solution détaillée

(1) $\langle T_n, \varphi \rangle = \frac{1}{2n} \sum_k \varphi(k/n)$: pour n assez grand, $\text{supp } \varphi \subset [-n, n]$ et la somme est une somme de Riemann de pas $1/n$ multipliée par $\frac{1/n}{2/n} = \frac{1}{2}$... Précisément $\frac{1}{2n} \sum_k \varphi(k/n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_k \varphi(k/n) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi$. (2) Donc $T_n \rightarrow \frac{1}{2} \lambda$ (la moitié de Lebesgue) : une suite de mesures *atomiques* converge vers une mesure *diffuse* — les distributions unifient les deux mondes. (3) Taux : pour $\varphi \in C_c^2$, l'erreur des sommes de Riemann du point milieu est $\mathcal{O}(n^{-2})$ (Euler–Maclaurin) ; ici points entiers/ n donc $\mathcal{O}(n^{-1})$ en général, $\mathcal{O}(n^{-2})$ après symétrisation. C'est le mécanisme *réseau* $\rightarrow$ *continuum* de la théorie des champs sur réseau : le pas $a = 1/n$ est le cut-off, et les corrections en puissances de a sont les « artefacts de réseau ». ✓

Chapitre 4

Convolution des distributions et solutions élémentaires

La convolution, déjà rencontrée pour les fonctions (chapitre 2), s'étend aux distributions et y déploie toute sa puissance : résoudre une EDP linéaire à coefficients constants se ramène à convoler le second membre par une solution élémentaire. Ce chapitre construit l'outillage (support compact, produit tensoriel, convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$) et démontre ce principe général.

Prérequis / rappel

Chapitre 3 en entier. On rappelle qu'une application linéaire entre espaces de suites/fonctions munis de convergences est continue ssi elle transforme suites convergentes en suites convergentes, et que C_c^∞ est stable par translation $\tau_a \varphi = \varphi(\cdot - a)$ et par symétrie $\check{\varphi} = \varphi(-\cdot)$.

4.1 Distributions à support compact

Définition 4.1. $\mathcal{E}'(\Omega)$ désigne l'espace des distributions à support compact dans Ω .

Proposition 4.2. (i) Toute $T \in \mathcal{E}'$ est d'ordre fini. (ii) $T \in \mathcal{E}'$ se prolonge canoniquement en forme linéaire continue sur $C^\infty(\Omega)$ tout entier (sans condition de support sur les fonctions test) : on pose $\langle T, f \rangle := \langle T, \theta f \rangle$ où $\theta \in C_c^\infty$ vaut 1 près de $\text{supp } T$, et le résultat ne dépend pas de θ .

Démonstration. (1) (i) Soit $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ valant 1 sur un voisinage de $K = \text{supp } T$ (exercice 2.3). Pour toute φ , $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \theta \varphi \rangle$ (la différence $(1 - \theta)\varphi$ est nulle près de K). Le critère (3.1) sur le compact fixe $\text{supp } \theta$ donne un ordre uniforme $p = p_{\text{supp } \theta}$. (2) (ii) Si θ_1, θ_2 valent toutes deux 1 près de K , $(\theta_1 - \theta_2)f$ est nulle près de K , donc $\langle T, (\theta_1 - \theta_2)f \rangle = 0$. La continuité sur C^∞ (muni de la convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées) résulte de (3.1). $\square$

Exemple 4.3. δ_a , $\partial^\alpha \delta_a$, toute mesure à support compact, toute $f \in L^1$ à support compact. Contre-exemple : $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$, $\text{vp } \frac{1}{x}$, le peigne III ne sont pas dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

4.2 Produit tensoriel de distributions

Théorème 4.4 (Produit tensoriel). Soient $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)$. Il existe une unique distribution $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{p+q})$ telle que

$$\langle S \otimes T, \varphi(x)\psi(y) \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^p), \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q),$$

et pour toute $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{p+q})$ on a la formule de Fubini distributionnelle

$$\langle S \otimes T, \Phi \rangle = \left\langle S, x \mapsto \langle T, \Phi(x, \cdot) \rangle \right\rangle.$$

Schéma de preuve. (1) *Bonne définition du membre de droite* : la fonction $x \mapsto \langle T, \Phi(x, \cdot) \rangle$ est C^∞ à support compact — la dérivation sous le crochet est licite car les taux d'accroissement de $\Phi(x+h, \cdot)$ convergent dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^q)$ (support commun, dérivées uniformes), et la continuité de T transporte la convergence. (2) *Unicité* : les combinaisons de produits $\varphi(x)\psi(y)$ sont denses dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^{p+q})$ (régularisation + polynômes de Bernstein sur un pavé, ou noyau produit) ; deux candidats coïncident sur une partie dense et sont continus. (3) *Symétrie Fubini* : le même argument montre que l'autre itération définit la même distribution (elles coïncident sur les produits). Détails : Golse, ch. 4.3. $\square$

Exemple 4.5. $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$; $\delta_0 \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{R}^q}$ est la « masse uniforme portée par l'hyperplan $x = 0$ » : $\langle \delta_0 \otimes 1, \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^q} \Phi(0, y) dy$. Les distributions portées par des sous-variétés (couches simples et doubles de l'électrostatique) sont toutes de ce type dans des coordonnées adaptées.

4.3 Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$

Définition 4.6 (Convolution distribution–fonction test). Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T_y, \varphi(x - y) \rangle.$$

C'est une fonction C^∞ (dérivation sous le crochet), et $\partial^\alpha(T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$.

Exemple 4.7 (La convolution qui rend tout concret). $\delta_0 * \varphi = \varphi$: la masse de Dirac est l'élément neutre. $\delta_a * \varphi = \tau_a \varphi$ (translation) ; $\delta'_0 * \varphi = \varphi'$ (dérivation). Toute opération linéaire invariante par translation est une convolution — voilà pourquoi la convolution est l'algèbre naturelle de la physique homogène dans l'espace.

Théorème 4.8 (Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$). Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, il existe une unique $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle.$$

Elle vérifie : (i) $T * S = S * T$; (ii) $\partial^\alpha(T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$; (iii) $\delta_0 * T = T$; (iv) $\text{supp}(T * S) \subset \text{supp } T + \text{supp } S$; (v) la convolution est séparément continue.

Éléments de preuve. La fonction $x \mapsto \langle S_y, \varphi(x + y) \rangle$ est dans C_c^∞ (support $\subset \text{supp } \varphi - \text{supp } S$, compact ; régularité par dérivation sous crochet, prop. 4.2(ii)) : le membre de droite a un sens. (ii) : transférer ∂^α sur φ et utiliser $\partial_x^\alpha \varphi(x + y) = \partial_y^\alpha \varphi(x + y)$. (i) et l'associativité (quand deux des trois facteurs sont à support compact) suivent du théorème 4.4. (iii) : calcul direct. (iv) : comme prop. 2.5(iii). $\square$

Attention — piège classique

Sans hypothèse de support, la convolution de deux distributions n'existe pas en général ($\mathbf{1} * \mathbf{1}$ diverge). Règle pratique : *au plus un facteur à support non compact*. Une exception utile : supports tous deux limités à gauche sur $\mathbb{R}$ (algèbre de convolution causale $\mathcal{D}'_+$), cadre naturel des systèmes causaux et du calcul opérationnel de Heaviside.

4.4 Solutions élémentaires : le principe général

Définition 4.9 (Solution élémentaire). Soit $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Une *solution élémentaire* (ou fonction de Green sur $\mathbb{R}^N$ entier) est une $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$P(\partial) E = \delta_0.$$

Théorème 4.10 (Principe de superposition). *Si E est solution élémentaire de $P(\partial)$ et $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors*

$$u = E * f$$

*vérifie $P(\partial)u = f$. Réciproquement, toute solution à support convenable diffère de $E * f$ par une solution de l'équation homogène.*

Démonstration. Par le théorème 4.8(ii)–(iii) : $P(\partial)(E * f) = (P(\partial)E) * f = \delta_0 * f = f$. Pour la réciproque : si $P(\partial)u = P(\partial)v = f$, alors $P(\partial)(u - v) = 0$. $\square$

Intuition

Physique du principe : δ_0 est la *source unité instantanée/ponctuelle* ; E est la réponse du milieu à cette source (réponse impulsionnelle, champ d'une charge unité, onde émise par un flash). Une source étendue f est une superposition de sources ponctuelles $f = \int f(y)\delta_y dy$ — au sens des distributions — et la linéarité superpose les réponses : $u(x) = \int E(x - y)f(y) dy$. *Tout le chapitre 7 et le chapitre 8 consistent à calculer les E des quatre grands opérateurs* ; le propagateur de la théorie des champs (chapitres 11–12) est exactement la solution élémentaire de l'opérateur quadratique de l'action.

Théorème 4.11 (Malgrange–Ehrenpreis (admis)). *Tout opérateur $P(\partial) \neq 0$ à coefficients constants possède une solution élémentaire dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

Ce théorème d'existence générale (démontré via la transformation de Fourier et une division délicate par le polynôme $P(i\xi)$) garantit que le principe de superposition n'est jamais vide. En pratique, on calcule E explicitement cas par cas — c'est l'objet de la partie B.

Exemple 4.12 (Solution élémentaire de $\frac{d}{dx}$ et de l'oscillateur). (i) $E = H$ (Heaviside) vérifie $E' = \delta_0$ (théorème 3.12) : la primitive causale. (ii) Oscillateur harmonique $u'' + \omega^2 u$: cherchons E causale (nulle pour $t < 0$) de la forme $E = H(t)g(t)$ avec g lisse. La formule des sauts (3.4) donne $E' = Hg' + g(0)\delta_0$ et $E'' = Hg'' + g'(0)\delta_0 + g(0)\delta'_0$. Donc $E'' + \omega^2 E = H(g'' + \omega^2 g) + g'(0)\delta_0 + g(0)\delta'_0$: il faut $g'' + \omega^2 g = 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, soit $g(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$:

$$E(t) = H(t) \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

la *fonction de Green retardée* de l'oscillateur. La réponse à un forçage f est $u(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega(t-s)}{\omega} f(s) ds$ — la formule de Duhamel, ici démontrée en trois lignes de calcul distributionnel.

Application finance / signal

En microstructure de marché, l'*impact price* transitoire d'un métaordre est modélisé par $p(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{Q}(s) ds$ — convolution du flux d'ordres par un noyau causal G (propagator model de Bouchaud). L'estimation de G est un problème de déconvolution ; sa causalité et sa décroissance lente ($G(t) \sim t^{-\beta}$) font de $\mathcal{D}'_+$ le cadre naturel. Le TD 4 estime un tel noyau sur données simulées Hawkes (`optimizr.simulate_hawkes`).

Au notebook compagnon

TD 4 du notebook — fonction de Green de l'oscillateur amorti : animation de la réponse impulsionnelle et convolution numérique $E * f$ pour divers forçages ; comparaison avec l'intégration directe (`scipy.solve_ivp`) ; noyau d'impact causal estimé sur un flux de Hawkes (`optimizr.simulate_hawkes, two_sided_intensities`).

4.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 4.13 (Les potentiels retardés : la convolution qui transporte la causalité). L'équation des potentiels en jauge de Lorenz, $\square A^\nu = \mu_0 j^\nu$ (chap. 18), se résout par convolution avec la fonction de Green retardée du d'Alembertien (18.8) :

$$A^\nu = G_{\text{ret}} * j^\nu \cdot \mu_0 \implies A^\nu(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j^\nu(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3y.$$

Trois leçons structurelles. **(1)** Le support de G_{ret} est *sur* le cône de lumière passé : chaque point reçoit la nouvelle électromagnétique avec le retard exact $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c$, ni avant ni après (principe de Huygens fort, spécifique à la dimension 3+1, chap. 9). **(2)** La causalité de la convolution (propriété des supports, thm. 4.8) : si la source s'allume à $t = 0$, le potentiel est rigoureusement nul pour $t < |\mathbf{x}|/c$ — aucune fuite supraluminique, théorème et pas postulat. **(3)** Application chiffrée : une antenne dipolaire émettant à $f = 100$ MHz ($\lambda = 3$ m) : à 30 km, le champ reçu à l'instant t a été émis 100 μ s plus tôt ; la structure en $j(t-r/c)/r$ explique à la fois l'affaiblissement en $1/r$ du champ de rayonnement *et* la conservation de la puissance totale ($|E|^2 \cdot r^2 = \text{cste}$). Le même schéma « Green causale * source » structure la réponse linéaire (chap. 15) : la susceptibilité *est* une fonction de Green retardée.

Exemple 4.14 (La factorisation QCD : la section efficace comme convolution). Le calcul le plus important de la physique des collisionneurs est une convolution. Un proton n'est pas une particule élémentaire : à haute énergie, il apparaît comme un flux de *partons* (quarks, gluons) portant chacun une fraction x de son impulsion, décrit par les densités $f_q(x, Q^2)$ (PDF). Le théorème de factorisation écrit la section efficace hadronique comme

$$\sigma(pp \rightarrow X) = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_a(x_1, Q^2) f_b(x_2, Q^2) \hat{\sigma}_{ab \rightarrow X}(x_1 x_2 s, Q^2),$$

convolution multiplicative (structure de Mellin : elle diagonalise en moments, exactement comme la convolution additive diagonalise en Fourier, chap. 5) entre le *long-distance* non perturbatif (f_a , mesuré) et le *court-distance* perturbatif ($\hat{\sigma}$, calculé en diagrammes, chap. 12). **Application — production du boson Z au LHC** : $\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow Z) \propto \delta(x_1 x_2 s - M_Z^2)$: la distribution de Dirac de la résonance « lit » les PDF le long de l'hyperbole $x_1 x_2 = M_Z^2/s$ ($\approx 4,3 \times 10^{-5}$ au LHC 13 TeV) : mesurer la rapidité du Z , c'est *scanner* $f_q(x)$ — la machine fait l'appariement $\langle \delta, f \otimes f \rangle$ pour nous. La dépendance en Q^2 des PDF est traitée à l'exemple 6.7 (équations DGLAP) et refermée au chapitre 16.

4.6 Exercices corrigés

Exercice 4.1 (★) — Algèbre des Dirac

Calculer $\delta_a * \delta_b$, puis $\delta'_a * \delta'_b$, puis $(\delta_a - \delta_0) * (\delta_b - \delta_0)$.

Solution détaillée

(1) $\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle = \langle (\delta_a)_x, \langle (\delta_b)_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \varphi(a+b)$: $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ — la convolution des Dirac *est* l'addition du groupe. **(2)** $\delta'_a * \delta'_b = \delta''_{a+b}$ (transférer les deux dérivées). **(3)** $\delta_{a+b} - \delta_a - \delta_b + \delta_0$: l'opérateur aux différences finies double — utile pour discrétiser les EDP. ✓

Exercice 4.2 (★★) — Équation de la corde pincée

Trouver la solution élémentaire causale de l'opérateur de transport amorti $L = \frac{d}{dt} + \gamma$ ($\gamma > 0$), puis résoudre $u' + \gamma u = f$ pour $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et vérifier l'unicité dans les distributions causales.

Solution détaillée

(1) Cherchons $E = H(t)g(t) : E' + \gamma E = H(g' + \gamma g) + g(0)\delta_0$; il faut $g' = -\gamma g$, $g(0) = 1$: $E = H(t)e^{-\gamma t}$. (2) $u = E * f : u(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} f(s) ds$ (pour f fonction) — le filtre exponentiel EWMA omniprésent en traitement du signal et en finance (moyennes mobiles exponentielles). (3) Unicité causale : si $v' + \gamma v = 0$ et $\text{supp } v \subset [T, \infty)$, alors $(e^{\gamma t} v)' = 0$ donc $e^{\gamma t} v = c$ constante ; le support limité à gauche force $c = 0$. ✓

Exercice 4.3 (★★) — Couche simple et formule des sauts N -dimensionnelle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné à bord C^1 et $u \in C^2(\overline{\Omega})$, prolongée par 0 hors de Ω . Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:

$$\Delta(u\mathbf{1}_\Omega) = \{\Delta u\}\mathbf{1}_\Omega + \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_{\partial\Omega} + \text{div}(u n d\sigma_{\partial\Omega}),$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface (couche simple) et le dernier terme une couche double.

Solution détaillée

(1) Contre $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) : \langle \Delta(u\mathbf{1}_\Omega), \varphi \rangle = \int_\Omega u \Delta \varphi dx$. (2) Deux applications de la formule de Green (cor. 1.12) : $\int_\Omega u \Delta \varphi = \int_\Omega \Delta u \varphi + \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$. (3) On identifie terme à terme : $\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \langle \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma, \varphi \rangle$ (couche simple, signe + après transfert), et $\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \langle -\text{div}(u n d\sigma), \varphi \rangle$ au sens des distributions (couche double = distribution d'ordre 1 portée par la surface). En électrostatique : densité surfacique de charge (couche simple, saut du champ normal) et densité de dipôles (couche double, saut du potentiel). ✓

Exercice 4.4 (★★★) — Convolution et régularité : le lissage de Green

Soit $E = H(t)e^{-\gamma t}$ (exercice 4.2). Montrer que pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, $u = E * f \in H^1(\mathbb{R})$ (dérivée L^2), et que l'application $f \mapsto u$ gagne exactement un cran de dérivabilité L^2 . Commenter en terme de « régularisation elliptique ».

Solution détaillée

(1) $u = E * f$ est bien définie ($E \in L^1$ + support compact de f) et $u' + \gamma u = f$ au sens des distributions (théorème 4.10). (2) Donc $u' = f - \gamma u$; il suffit que $u \in L^2$. Young (prop. 2.5(ii)) avec $E \in L^1$, $f \in L^2 : \|u\|_{L^2} \leq \|E\|_{L^1} \|f\|_{L^2} = \gamma^{-1} \|f\|_{L^2}$. (3) Ainsi $\|u'\|_{L^2} \leq 2\|f\|_{L^2} : u \in H^1$ avec contrôle. Le gain est *exactement* d'ordre 1, l'ordre de l'opérateur : c'est le prototype du *gain de régularité elliptique* ($u \in H^{s+m}$ si $f \in H^s$, P elliptique d'ordre m) que la transformation de Fourier rendra transparent au chapitre 5 : diviser par le symbole $P(i\xi)$ fait gagner $|\xi|^{-m}$. ✓

Chapitre 5

Transformation de Fourier et distributions tempérées

La transformation de Fourier diagonalise *simultanément* toutes les dérivations : $\partial_{x_j} \mapsto i\xi_j$. Convolutions, EDP à coefficients constants, propagateurs — tout devient multiplication. Ce chapitre construit le cadre exact où cette magie opère sans douleur : la classe de Schwartz $\mathcal{S}$ et son dual $\mathcal{S}'$, les distributions tempérées.

Prérequis / rappel

Chapitres 1–4. Convention adoptée (celle de Golse) :

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx.$$

Avec cette convention, l'inversion porte un $(2\pi)^{-N}$: $f(x) = (2\pi)^{-N} \int e^{+i\xi \cdot x} \widehat{f}(\xi) d\xi$, et Plancherel s'écrit $\|f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2$.

5.1 La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Définition 5.1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide : pour tous multi-indices α, β ,

$$p_{\alpha\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty.$$

$f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{S}$ si $p_{\alpha\beta}(f_n - f) \rightarrow 0$ pour tous α, β .

Exemple 5.2. Les gaussiennes $e^{-a|x|^2}$ ($a > 0$), les $P(x)e^{-|x|^2}$ (fonctions d'Hermite!), tout C_c^∞ . Pas dans $\mathcal{S}$: $e^{-|x|}$ (non lisse en 0), $(1+|x|^2)^{-1}$ (décroissance polynomiale seulement), $e^{-x^2} \sin(e^{x^2})$ (les dérivées ne décroissent pas).

L'intérêt de $\mathcal{S}$: c'est le *plus grand espace naturellement stable* par les quatre opérations ∂^α , $x^\beta \cdot$, $\mathcal{F}$, $*$ — comme le montre le théorème suivant.

Théorème 5.3 ($\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}$). Pour $f \in \mathcal{S}$:

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad (5.1)$$

$$\mathcal{F}(x^\beta f)(\xi) = (i)^{|\beta|} \partial^\beta \widehat{f}(\xi), \quad (5.2)$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \widehat{g}, \quad \mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \widehat{f} * \widehat{g}, \quad (5.3)$$

et $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est linéaire, continue, bijective, d'inverse

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{+i\xi \cdot x} g(\xi) d\xi = (2\pi)^{-N} \mathcal{F}g(-x). \quad (5.4)$$

Démonstration. (1) (5.1) : intégration par parties (1.3), licite car tout décroît rapidement ; chaque ∂_{x_j} sort un facteur $i\xi_j$. (2) (5.2) : dérivation sous l'intégrale (dominée par $|x^\beta f| \in L^1$). (3) Ces deux règles montrent que $\xi^\beta \partial^\alpha \hat{f} = \pm \mathcal{F}(\partial^\beta (x^\alpha f))$ est bornée (transformée d'une L^1) : $\hat{f} \in \mathcal{S}$, et la continuité suit des mêmes estimations. (4) (5.3) première formule : Fubini, $\int e^{-i\xi x} \int f(x-y)g(y)dy dx$, changement $x \rightarrow x+y$. (5) *Inversion.* Le calcul pivot est la transformée de la gaussienne : pour $G_a(x) = e^{-a|x|^2}$,

$$\widehat{G}_a(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{N/2} e^{-|\xi|^2/4a}, \quad (5.5)$$

obtenu en complétant le carré dans (1.2) coordonnée par coordonnée (le déplacement de contour est justifié par le théorème de Cauchy appliqué au rectangle de hauteur $\xi_j/2a$: l'intégrande entière e^{-az^2} décroît sur les bords verticaux). Ensuite, pour $f \in \mathcal{S}$:

$$(2\pi)^{-N} \int e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|^2} d\xi = (2\pi)^{-N} \iint f(y) e^{i\xi(x-y)-\varepsilon|\xi|^2} dy d\xi = (f * g_\varepsilon)(x),$$

où $g_\varepsilon(u) = (4\pi\varepsilon)^{-N/2} e^{-|u|^2/4\varepsilon}$ est une approximation de l'unité gaussienne (utiliser (5.5) et Fubini). Quand $\varepsilon \rightarrow 0$: le membre de gauche tend vers $(2\pi)^{-N} \int e^{i\xi x} \widehat{f}$ (convergence dominée), le membre de droite vers $f(x)$ (théorème 2.6) : c'est (5.4). $\square$

Idée-clé

Retenir la gaussienne (5.5) sous forme mnémotechnique : *la Fourier d'une gaussienne de largeur σ est une gaussienne de largeur $1/\sigma$* . Étroit en espace $\iff$ large en fréquence : c'est le principe d'incertitude en germe, et la raison d'être de la limite $\delta_0 \leftrightarrow \widehat{\delta}_0 = 1$ ci-dessous.

Théorème 5.4 (Plancherel–Parseval). *Pour $f, g \in \mathcal{S}$,*

$$\int f \bar{g} dx = (2\pi)^{-N} \int \widehat{f} \widehat{\bar{g}} d\xi.$$

$\mathcal{F}$ se prolonge en isomorphisme de L^2 (isométrie à $(2\pi)^{N/2}$ près).

Démonstration. Poser $h = \overline{\mathcal{F}^{-1}g}$... le plus court : la formule d'échange $\int \widehat{f} \phi = \int f \widehat{\phi}$ (Fubini immédiat), appliquée à $\phi = (2\pi)^{-N} \overline{\mathcal{F}g}$ dont la transformée est $\bar{g}$ par (5.4). Le prolongement L^2 suit de la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 (cor. 2.7). $\square$

5.2 Distributions tempérées

Définition 5.5. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}$: $|\langle T, f \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} p_{\alpha\beta}(f)$. Pour $T \in \mathcal{S}'$, on définit

$$\langle \widehat{T}, f \rangle := \langle T, \widehat{f} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Comme $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est continue, $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$; et comme $\mathcal{F}$ est bijective sur $\mathcal{S}$, elle l'est sur $\mathcal{S}'$. La formule d'échange garantit la compatibilité avec les fonctions : $\widehat{\widehat{f}} = T_f$ pour $f \in L^1$.

Exemple 5.6 (Qui est tempéré?). Sont dans $\mathcal{S}'$: tout L^p ($1 \leq p \leq \infty$), les fonctions à croissance polynomiale, toutes les distributions à support compact, le peigne III, $\text{vp } \frac{1}{x}$. *N'est pas tempéré* : $e^{|x|}$, e^{x^2} (croissance trop rapide : le crochet contre une gaussienne diverge). Moralité : « tempéré = croissance au plus polynomiale, en un sens moyen ».

Exemple 5.7 (Le dictionnaire fondamental).

T	$\hat{T}$	preuve en une ligne
δ_0	1	$\langle \hat{\delta}_0, f \rangle = \hat{f}(0) = \int f$
1	$(2\pi)^N \delta_0$	inversion appliquée à la ligne 1
δ_a	$e^{-ia\xi}$	translation
$\partial^\alpha \delta_0$	$(i\xi)^\alpha$	(5.1)
x^β	$(2\pi)^N i^{ \beta } \partial^\beta \delta_0$	(5.2)
H (Heaviside)	$\pi \delta_0 + \frac{1}{i} \text{vp} \frac{1}{\xi}$	Plemelj (3.2)
sgn	$\frac{2}{i} \text{vp} \frac{1}{\xi}$	$\text{sgn} = 2H - 1$
$e^{-a x ^2}$	$(\pi/a)^{N/2} e^{- \xi ^2/4a}$	(5.5)

La ligne H mérite le détail : $H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H e^{-\varepsilon x}$ dans $\mathcal{S}'$, et $\mathcal{F}(H e^{-\varepsilon x})(\xi) = \int_0^\infty e^{-(\varepsilon + i\xi)x} dx = \frac{1}{\varepsilon + i\xi} = \frac{1}{i} \frac{1}{\xi - i\varepsilon}$; Sokhotski–Plemelj (3.2) donne la limite $\frac{1}{i} (\text{vp} \frac{1}{\xi} + i\pi \delta_0)$.

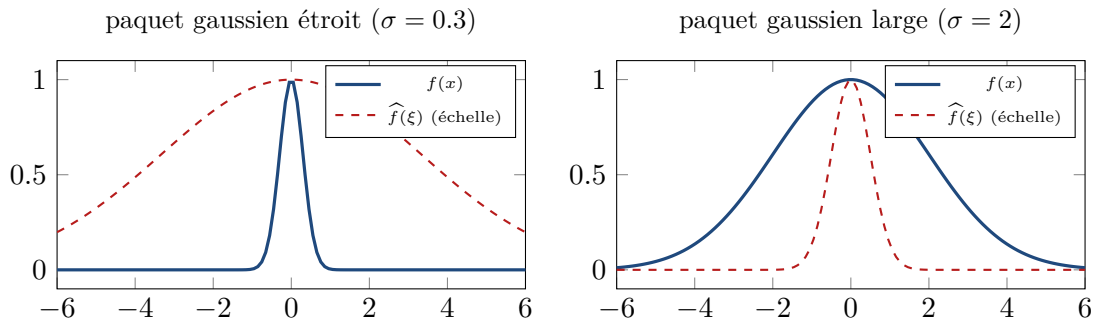


FIGURE 5.1 – Dualité largeur–fréquence : la transformée d’une gaussienne étroite est large et réciproquement. Cas limites : $\delta_0 \leftrightarrow 1$ (localisation parfaite $\leftrightarrow$ spectre plat).

5.3 Formule sommatoire de Poisson et échantillonnage

Théorème 5.8 (Poisson). Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\widehat{\text{III}} = 2\pi \text{III}_{2\pi} := 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}, \quad \text{soit, contre } f \in \mathcal{S} : \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k). \quad (5.6)$$

Démonstration. (1) III est 1-périodique : $\tau_1 \text{III} = \text{III}$. En Fourier, $e^{-i\xi} \widehat{\text{III}} = \widehat{\text{III}}$, donc $\widehat{\text{III}}$ est portée par les zéros de $e^{-i\xi} - 1$, soit $\{2\pi k\}$. (2) Près de chaque $2\pi k$, le théorème 3.18 et l’équation $(e^{-i\xi} - 1) \widehat{\text{III}} = 0$ (zéro simple!) forcent $\widehat{\text{III}} = \sum_k c_k \delta_{2\pi k}$ sans dérivées ; la périodicité de III sous $x \mapsto x + 1$ ET l’invariance de III par dilatation... plus simplement, l’invariance par translation $\xi \mapsto \xi + 2\pi$ de l’équation donne $c_k = c$ constant. (3) La constante : tester contre la gaussienne $f = e^{-x^2/2}$ dont tout est explicite ; ou remarquer $\langle \widehat{\text{III}}, e^{-\varepsilon \xi^2} \rangle$ et faire $\varepsilon \rightarrow 0$. On trouve $c = 2\pi$ (avec notre convention). D’où (5.6) en testant $\langle \widehat{\text{III}}, f \rangle = \langle \text{III}, \hat{f} \rangle$. $\square$

Application physique

(i) *Cristallographie* : le réseau réciproque d’un cristal est le support de la transformée de Fourier du réseau direct — les pics de Bragg sont (5.6) en dimension 3. (ii) *Échantillonnage de Shannon* : échantillonner un signal au pas a = multiplier par III_a = périodiser son

spectre au pas $2\pi/a$; si le signal est à bande limitée $[-\pi/a, \pi/a]$, les copies spectrales ne se recouvrent pas et le signal se reconstruit par interpolation sinc — sinon, *aliasing*. (iii) *Fonctions thêta et dualité température inverse* : appliquée aux gaussiennes, (5.6) donne $\theta(t) = \sum e^{-\pi n^2 t} = t^{-1/2} \theta(1/t)$ — l'identité modulaire qui échange haute et basse température dans les fonctions de partition (chapitre 13, où la fonction de partition de la particule sur un cercle la réalisera physiquement).

5.4 Espaces de Sobolev par Fourier

Définition 5.9. Pour $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}' : \widehat{u} \in L^2_{\text{loc}} \text{ et } \|u\|_{H^s}^2 = (2\pi)^{-N} \int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

$H^0 = L^2$; pour $s = m$ entier, $H^m = \{u \in L^2 : \partial^\alpha u \in L^2, |\alpha| \leq m\}$ (les deux normes sont équivalentes via (5.1)). L'échelle H^s mesure la régularité *en moyenne quadratique*, y compris fractionnaire et négative : $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^N) \iff s < -N/2$ (car $|\widehat{\delta}_0| = 1$ et $\int (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty$ ssi $2s < -N$).

Théorème 5.10 (Injection de Sobolev). *Si $s > N/2 + k$, alors $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^N)$: toute $u \in H^s$ (modifiée sur un négligeable) est C^k à dérivées bornées, avec $\|u\|_{C^k} \leq C \|u\|_{H^s}$.*

Démonstration. Pour $|\alpha| \leq k$, $\|\partial^\alpha u\|_\infty \leq (2\pi)^{-N} \int |\xi^\alpha| |\widehat{u}| \leq (2\pi)^{-N} \left(\int \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi \right)^{1/2} \|u\|_{H^s}$ par Cauchy–Schwarz ; l'intégrale converge ssi $2s - 2|\alpha| > N$ (exemple 1.9), garanti par $s > N/2 + k$. La continuité de $\partial^\alpha u$ vient de la convergence dominée dans la formule d'inversion. $\square$

Application finance / signal

Le mouvement brownien fractionnaire B^H d'exposant de Hurst H a des trajectoires dans H^s_{loc} pour tout $s < H + \frac{1}{2}$: sa densité spectrale $\sim |\xi|^{-2H-1}$ rend le critère intégral transparent. L'injection de Sobolev redonne la régularité höldérienne $< H$ des trajectoires. Le TD 5 simule B^H (`optimizr.simulate_fbm`), estime H par régression spectrale et par `optimizr.estimate_hurst`, et visualise la correspondance pente spectrale $\leftrightarrow$ rugosité — le fondement empirique de la *volatilité rugueuse* ($H \approx 0.1$ sur les marchés).

Au notebook compagnon

TD 5 du notebook — dictionnaire de Fourier vérifié par FFT (gaussiennes, Heaviside régularisée, peigne fini et aliasing *animé*) ; inversion spectrale avec `optimizr.fourier_invert` ; spectre du fBm et estimation de Hurst (`simulate_fbm`, `estimate_hurst`, `scale_dependent_hurst`).

5.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 5.11 (Diffraction cristalline : la loi de von Laue est une formule de Poisson). Un cristal de réseau $\Lambda = \{n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3\}$ a une densité électronique périodique, modélisable par $\rho = \rho_{\text{maille}} * \text{III}_\Lambda$ où $\text{III}_\Lambda = \sum_{R \in \Lambda} \delta_R$ est le peigne de Dirac du réseau. Une onde plane incidente $\mathbf{k}$ diffuse une amplitude proportionnelle à $\widehat{\rho}(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$. Or par le théorème de convolution et la formule de Poisson généralisée :

$$\widehat{\rho}(\mathbf{q}) = \widehat{\rho}_{\text{maille}}(\mathbf{q}) \cdot \widehat{\text{III}_\Lambda}(\mathbf{q}) = \widehat{\rho}_{\text{maille}}(\mathbf{q}) \cdot \frac{(2\pi)^3}{V_{\text{maille}}} \sum_{\mathbf{K} \in \Lambda^*} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{K}) :$$

l'intensité diffractée est *nulle sauf* si $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{K}$ appartient au *réseau réciproque* Λ^* (défini par $\mathbf{a}_i^* \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$) — c'est la condition de von Laue, équivalente à la loi de Bragg $2d\sin\theta = n\lambda$. Chaque tache de diffraction est une distribution de Dirac élargie par la taille finie du cristal (N mailles $\Rightarrow$ largeur $\propto 1/N$, hauteur $\propto N^2$: exactement le noyau de Dirichlet des séries de Fourier). L'intensité relative des taches est modulée par $|\hat{\rho}_{\text{maille}}(\mathbf{K})|^2$ (facteur de structure) : la cristallographie — de la première photo de Laue (1912) à la double hélice de l'ADN (cliché 51 de Franklin, 1952) — est de l'analyse de Fourier expérimentale : on mesure $|\hat{\rho}|^2$ et on inverse.

Exemple 5.12 (Maxwell dans l'espace de Fourier : polarisations et jauge). Appliquons la stratégie « Fourier diagonalise les EDP à coefficients constants » aux équations de Maxwell dans le vide. En transformant $\square A^\nu = 0$ (jauge de Lorenz, chap. 18) : $(\omega^2/c^2 - |\mathbf{k}|^2)\hat{A}^\nu = 0$, donc $\hat{A}^\nu$ est supporté par le cône $\omega = \pm c|\mathbf{k}|$ — une distribution singulière $\hat{A}^\nu \propto \delta(\omega^2/c^2 - k^2)$: la relation de dispersion du photon, sans masse ($\omega/k = c$ pour tout k : la lumière ne disperse pas dans le vide, contrairement à Schrödinger, chap. 9). **Comptage des polarisations** : A^μ a 4 composantes ; la condition de Lorenz $k_\mu \hat{A}^\mu = 0$ en retire une ; la jauge résiduelle $\hat{A}^\mu \rightarrow \hat{A}^\mu + ik^\mu \hat{\alpha}$ (avec $k^2 = 0$) en retire une seconde : il reste *deux* polarisations physiques, transverses — les deux états d'hélicité du photon. Ce comptage « $4 - 1 - 1 = 2$ », fait ici avec des distributions supportées sur le cône, est le même qui, non trivialement généralisé à $SU(3)$, donne les deux polarisations de chacun des huit gluons — et sa violation apparente en jauge covariante est compensée par les fantômes de Faddeev–Popov (au-delà de ce cours, [21]).

5.6 Exercices corrigés

Exercice 5.1 (★) — Transformée de la porte et Gibbs

Calculer $\widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}}$. Pourquoi la reconstruction tronquée $\int_{|\xi| \leq \Lambda}$ oscille-t-elle près des sauts (phénomène de Gibbs) ?

Solution détaillée

(1) $\int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$. (2) La décroissance n'est que $\mathcal{O}(1/|\xi|)$ — signature d'un saut (une dérivée distributionnelle contenant un Dirac). La troncature $|\xi| \leq \Lambda$ convole le signal par le noyau de Dirichlet $\frac{\sin \Lambda x}{\pi x}$, *non positif* (exemple 3.9(iii)) : ses lobes latéraux créent un dépassement de $\approx 9\%$ du saut, qui ne disparaît pas quand $\Lambda \rightarrow \infty$ (il se contracte seulement). Régulariser (fenêtre de Fejér, gaussienne) rétablit la positivité et tue Gibbs. ✓

Exercice 5.2 (★★) — Équation de Poisson spectrale

Résoudre $-\Delta u + m^2 u = f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ par Fourier ($m > 0$). Montrer $u \in H^{s+2}$ si $f \in H^s$; que se passe-t-il quand $m \rightarrow 0$?

Solution détaillée

(1) $(|\xi|^2 + m^2)\hat{u} = \hat{f}$, d'où $\hat{u} = \frac{\hat{f}}{|\xi|^2 + m^2}$: division *sans zéro* — l'opérateur de Klein–Gordon statique est inversible. (2) $(1 + |\xi|^2)^{s+2}|\hat{u}|^2 \leq C_m(1 + |\xi|^2)^s|\hat{f}|^2$ car $\frac{(1+|\xi|^2)}{|\xi|^2+m^2} \leq C_m$: gain de 2 crans, l'ordre de l'opérateur. (3) Quand $m \rightarrow 0$, la constante $C_m \sim m^{-2}$ explose : la division par $|\xi|^2$ est singulière en $\xi = 0$ — divergence *infrarouge*. La solution élémentaire correspondante $E_m(x)$ (le potentiel de Yukawa $\frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|}$ en $N = 3$, cf. chapitre 7) perd sa décroissance exponentielle et devient le potentiel coulombien $\frac{1}{4\pi|x|}$: la *portée* de l'interaction

est $1/m$. En théorie des champs : masse nulle $\iff$ interaction à longue portée $\iff$ corrélations critiques en loi de puissance (chapitre 10). ✓

Exercice 5.3 (★★) — Oscillateur harmonique et Hermite

Montrer que les fonctions d'Hermite $h_n(x) = (x - \frac{d}{dx})^n e^{-x^2/2}$ sont vecteurs propres de $\mathcal{F}$ (en dimension 1) avec valeurs propres $(-i)^n \sqrt{2\pi}$. Que dit ce spectre sur $\mathcal{F}^4$?

Solution détaillée

(1) Notons $A^\dagger = x - \frac{d}{dx}$ (opérateur de création). Par (5.1)–(5.2) : $\mathcal{F} \circ A^\dagger = \mathcal{F} \circ x - \mathcal{F} \circ \partial = i\partial_\xi \circ \mathcal{F} - i\xi \circ \mathcal{F} = -iA^\dagger \circ \mathcal{F}$. (2) Base : $\mathcal{F}e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$ (cas $a = \frac{1}{2}$ de (5.5)). Donc $\mathcal{F}h_n = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n$ par récurrence. (3) $\mathcal{F}^4 = (2\pi)^2 \text{Id}$: la transformation de Fourier est (à normalisation près) une rotation d'ordre 4 dans L^2 — c'est la rotation de $\pi/2$ dans l'espace des phases (x, ξ) , réalisée physiquement par un quart de période de l'oscillateur harmonique. Les états propres de l'oscillateur quantique *doivent* donc être vecteurs propres de $\mathcal{F}$: position et impulsion y jouent des rôles symétriques. ✓

Exercice 5.4 (★★★) — Principe d'incertitude de Heisenberg

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\|f\|_{L^2} = 1$, montrer

$$\left(\int x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left((2\pi)^{-1} \int \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{4},$$

avec égalité exactement pour les gaussiennes.

Solution détaillée

(1) Le second facteur est $\|f'\|_{L^2}^2$ par (5.1) et Plancherel. (2) Identité de commutation intégrée : $1 = \|f\|^2 = \int |f|^2 = -\int x \frac{d}{dx} |f|^2 dx = -2 \operatorname{Re} \int x \bar{f} f' dx$ (IPP, décroissance rapide). (3) Cauchy–Schwarz : $1 \leq 2 \|xf\|_{L^2} \|f'\|_{L^2}$, d'où le résultat en élevant au carré. (4) Égalité dans Cauchy–Schwarz ssi $f' = \lambda x f$ avec $\lambda < 0$ réel (pour que Re capte tout) : $f = Ce^{\lambda x^2/2}$, gaussienne. Interprétation quantique : $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$; interprétation signal : un signal ne peut être simultanément bref et à bande étroite ; interprétation trading : une moyenne mobile ne peut être à la fois réactive (support temporel court) et sélective en fréquence. ✓