

Cours II — Les EDP fondamentales de la physique

Équations aux dérivées partielles (chapitres 6–9)

HFThot Research Lab

d'après F. Golse (POLY431, École polytechnique) et P. Simon (Théorie statistique des champs)

Juillet 2026

Présentation

Partie II du cours *Des distributions à la théorie statistique des champs*. Elle applique l'outillage des distributions aux quatre EDP fondamentales de la physique : transport et méthode des caractéristiques, laplacien et fonctions de Green, chaleur et mouvement brownien, ondes et Schrödinger. Chaque chapitre se termine par des exercices corrigés gradués.

Table des matières

1	L'équation de transport et la méthode des caractéristiques	1
1.1	Transport à coefficients constants	1
1.2	Coefficients variables et formule intégrée	2
1.3	EDP non linéaires d'ordre 1 : Burgers et les chocs	3
1.4	Exemples physiques approfondis	4
1.5	Exercices corrigés	4
2	Laplacien, fonctions de Green et potentiel newtonien	7
2.1	La solution élémentaire du laplacien	7
2.2	Propriété de la moyenne et principe du maximum	8
2.3	Fonction de Green du domaine et noyau de Poisson	9
2.4	Exemples physiques approfondis	10
2.5	Exercices corrigés	11
3	L'équation de la chaleur et le mouvement brownien	13
3.1	Le noyau de la chaleur	13
3.2	Du marcheur aléatoire à la diffusion	14
3.3	Fokker–Planck : diffusion avec dérive	15
3.4	Exemples physiques approfondis	16
3.5	Exercices corrigés	17
4	Ondes et Schrödinger : propagation et dispersion	19
4.1	Corde vibrante : d'Alembert	19
4.2	Dimension 3 : moyennes sphériques et Huygens	20
4.3	Schrödinger libre : dispersion	21
4.4	Exemples physiques approfondis	21
4.5	Exercices corrigés	22

Chapitre 1

L'équation de transport et la méthode des caractéristiques

Première EDP, la plus simple et la plus structurante : l'équation de transport. Sa résolution par la *méthode des caractéristiques* — suivre l'information le long de courbes — est un paradigme qui réapparaît dans les équations de Hamilton–Jacobi, les lois de conservation, et l'approximation semi-classique du chapitre 13.

Prérequis / rappel

Théorème de Cauchy–Lipschitz : le problème $\dot{X}(t) = b(t, X(t))$, $X(s) = x$ admet une unique solution locale si b est continue et localement lipschitzienne en x ; elle est globale si b est à croissance au plus linéaire. On note $X(t; s, x)$ le *flot* : la position à l'instant t de la particule qui était en x à l'instant s .

1.1 Transport à coefficients constants

Théorème 1.1. *Le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + v \cdot \nabla_x u = 0 \quad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N), \quad u(0, x) = u_0(x) \in C^1,$$

admet l'unique solution C^1

$$u(t, x) = u_0(x - tv).$$

Démonstration. **(1) Existence :** $u(t, x) = u_0(x - tv)$ est C^1 et $\partial_t u = -v \cdot \nabla u_0(x - tv) = -v \cdot \nabla_x u$. **(2) Unicité :** soit u une solution ; posons $\phi(t) = u(t, x_0 + tv)$ (valeur le long de la droite caractéristique). Alors $\phi'(t) = \partial_t u + v \cdot \nabla_x u = 0$: ϕ est constante, donc $u(t, x_0 + tv) = u_0(x_0)$, soit $u(t, x) = u_0(x - tv)$ en posant $x = x_0 + tv$. $\square$

Intuition

La solution est l'onde de profil u_0 qui *glisse* à vitesse v sans se déformer. L'information voyage le long des droites $x = x_0 + tv$: les *caractéristiques*. Deux conséquences physiques immédiates : la vitesse de propagation est *finie* (et vaut exactement $|v|$), et il n'y a *aucun lissage* — un créneau reste un créneau, contrairement à la chaleur (chapitre 3) qui lisse instantanément.

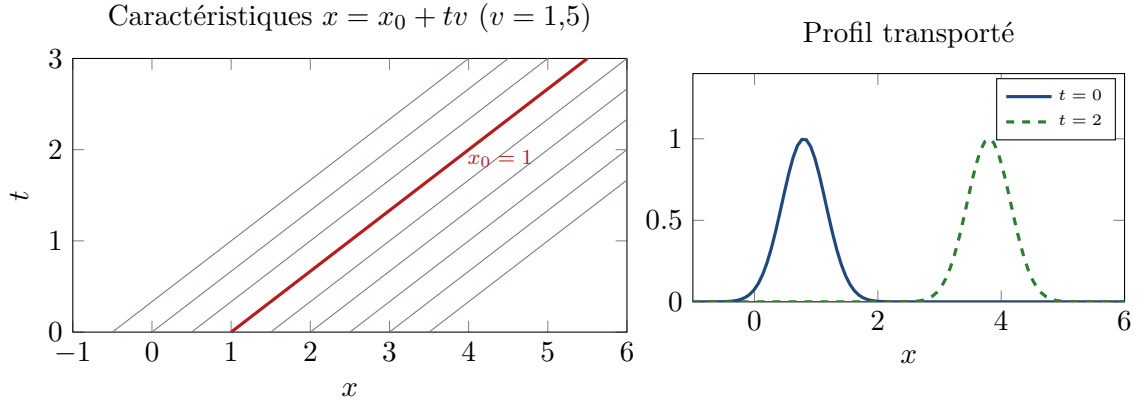


FIGURE 1.1 – Transport constant : l'information suit les droites caractéristiques (gauche) ; le profil glisse sans déformation (droite).

1.2 Coefficients variables et formule intégrée

Théorème 1.2 (Transport à coefficients variables). *Soit $b(t, x)$ de classe C^1 , à croissance au plus linéaire en x . Le problème*

$$\partial_t u + b(t, x) \cdot \nabla_x u + c(t, x) u = f(t, x), \quad u(0, \cdot) = u_0 \in C^1,$$

admet pour unique solution C^1

$$u(t, x) = u_0(X(0; t, x)) e^{-\int_0^t c(s, X(s; t, x)) ds} + \int_0^t f(s, X(s; t, x)) e^{-\int_s^t c(\tau, X(\tau; t, x)) d\tau} ds. \quad (1.1)$$

Démonstration. (1) Le long de la caractéristique $t \mapsto X(t; s, x)$ (Cauchy–Lipschitz), posons $\phi(t) = u(t, X(t; 0, x_0))$:

$$\phi'(t) = [\partial_t u + b \cdot \nabla u](t, X(t)) = -c(t, X(t)) \phi(t) + f(t, X(t)).$$

C'est une EDO linéaire du premier ordre en ϕ : facteur intégrant $e^{\int_0^t c}$, d'où $\phi(t) = \phi(0)e^{-\int_0^t c} + \int_0^t f(s)e^{-\int_s^t c} ds$. (2) On revient aux variables (t, x) en inversant le flot : $x_0 = X(0; t, x)$ (le flot est un difféomorphisme, d'inverse le flot rétrograde), ce qui donne (1.1). (3) L'unicité découle du même calcul : toute solution est déterminée le long de chaque caractéristique par sa donnée initiale, et les caractéristiques remplissent $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. $\square$

Exemple 1.3 (Compression et dilatation). $\partial_t u + x \partial_x u = 0$, u_0 donné : caractéristiques $\dot{X} = X$, soit $X(t) = x_0 e^t$; solution $u(t, x) = u_0(xe^{-t})$. Le profil est *dilaté* d'un facteur e^t : les caractéristiques divergent (fuite exponentielle), la donnée s'étale. Avec $b = -x$: compression, toute la donnée converge vers l'origine sans jamais l'atteindre. La divergence $\operatorname{div} b$ gouverne la compression des volumes (formule de Liouville $J(t) = \exp \int_0^t \operatorname{div} b$) : c'est le germe du théorème de Liouville de la mécanique hamiltonienne ($\operatorname{div} b = 0$ pour un flot hamiltonien $\Rightarrow$ conservation du volume de phase — fondement de la mesure microcanonique du chapitre 10).

Application physique

L'équation de *Liouville–Vlasov* $\partial_t f + p \cdot \nabla_x f - \nabla V \cdot \nabla_p f = 0$ transporte la densité de phase $f(t, x, p)$ le long du flot hamiltonien : c'est l'équation de transport dans $\mathbb{R}^{2N}$. La hiérarchie Vlasov $\rightarrow$ Fokker–Planck $\rightarrow$ hydrodynamique — chaque niveau ajoutant un terme diffusif ou une fermeture — organise *toute* la physique statistique hors équilibre. Le chapitre 3 ajoutera la diffusion ; le TD 9 résoudra Fokker–Planck avec

```
optimizr.fokker_planck_constant.
```

1.3 EDP non linéaires d'ordre 1 : Burgers et les chocs

Exemple 1.4 (Équation de Burgers sans viscosité).

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0.$$

La vitesse de transport est la solution *elle-même* : les caractéristiques sont les droites $x = x_0 + t u_0(x_0)$, le long desquelles u est constante ($= u_0(x_0)$) : mêmes deux lignes de preuve que le théorème 1.1, tant que les caractéristiques ne se croisent pas.

Proposition 1.5 (Temps d'explosion). *Si $\inf u'_0 = -m < 0$, les caractéristiques se croisent au temps $t^* = 1/m$, et la solution classique cesse d'exister : $\partial_x u$ explose (onde de choc).*

Démonstration. Deux caractéristiques issues de $x_0 < x_1$ se croisent lorsque $x_0 + t u_0(x_0) = x_1 + t u_0(x_1)$, soit $t = -\frac{x_1 - x_0}{u_0(x_1) - u_0(x_0)}$: positif dès que u_0 décroît quelque part, minimal $= 1/m$ quand la pente tend vers $\inf u'_0$. Quantitativement, en dérivant l'équation, $w = \partial_x u$ satisfait le long des caractéristiques l'EDO de Riccati $\dot{w} = -w^2$, d'où $w(t) = \frac{w_0}{1 + t w_0}$: explosion en temps fini $t = -1/w_0$ exactement pour $w_0 < 0$. $\square$

Intuition

Physiquement : les zones rapides rattrapent les zones lentes, le profil se *cambr*e jusqu'à devenir vertical (fig. 1.2). La nature (gaz, trafic routier, marché en krach) résout la crise en créant une *discontinuité* — le choc — qui se propage à la vitesse de Rankine–Hugoniot $\dot{s} = \frac{u_- + u_+}{2}$ (moyenne des vitesses de part et d'autre), la seule compatible avec la forme conservative $\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = 0$ *au sens des distributions* : c'est notre formule des sauts (3.4) en action ! La théorie des *solutions faibles* (entropiques) des lois de conservation est la descendance directe du chapitre 3.

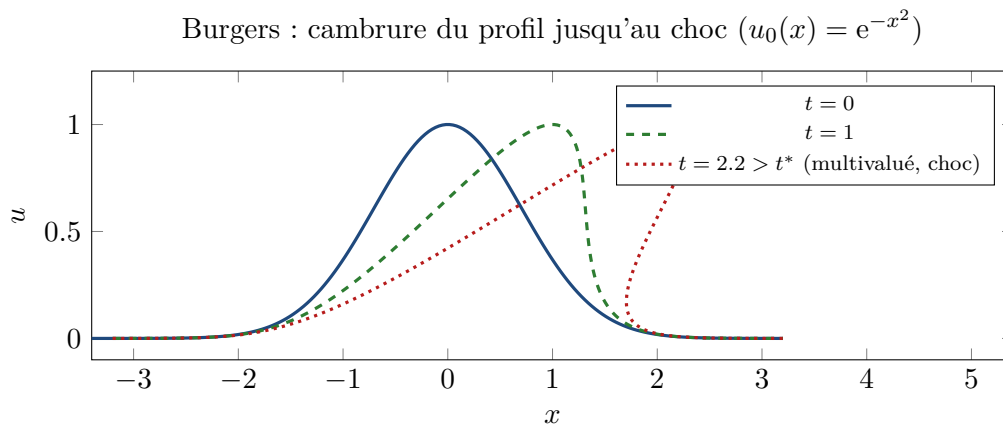


FIGURE 1.2 – Le profil de Burgers se cambr : à $t > t^* = \sqrt{e/2} \approx 1,17$ la courbe paramétrique devient multivaluée — la solution classique n'existe plus, un choc entropique la remplace.

Au notebook compagnon

TD 6 du notebook — animation du transport (profil glissant, caractéristiques), puis de Burgers : cambrure, temps critique $t^* = 1/\sup(-u'_0)$ vérifié numériquement,

choc de Rankine–Hugoniot par schéma de Godunov. Recherche du temps critique par `optimizr.differential_evolution` sur $-u'_0$.

1.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 1.6 (L'équation de continuité relativiste : la charge suit ses caractéristiques). La conservation de la charge, $\partial_\mu j^\mu = 0$, soit $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ pour un fluide chargé de vitesse $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, est une équation de transport : le long des lignes de courant $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{X})$ (les caractéristiques), $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$: la densité se dilue exactement au taux de divergence du flot — le jacobien du changement de variables lagrangien $\rightarrow$ eulérien (chap. 1) satisfait $\dot{J} = J \nabla \cdot \mathbf{v}$, donc $\rho J = \text{cste}$: la charge dans un volume matériel est transportée sans perte. **Trois incarnations** : (a) en électromagnétisme, $\partial_\mu j^\mu = 0$ est *automatique* par antisymétrie de $F^{\mu\nu}$ (chap. 18) : on ne peut pas écrire une théorie de Maxwell qui viole la conservation de la charge ; (b) en mécanique quantique, c'est le courant de probabilité de Noether (chap. 17, exemple 17.10) ; (c) en astrophysique, la même équation transporte la densité de matière noire le long du flot de Hubble — et ses caustiques (où $J \rightarrow 0$, croisée des caractéristiques comme pour Burgers) sont les murs et filaments de la toile cosmique : l'approximation de Zel'dovich est exactement notre équation de Burgers en cosmologie.

Exemple 1.7 (Les équations DGLAP : un transport dans l'échelle d'énergie). Les densités de partons $f_q(x, Q^2)$ de l'exemple 4.14 « coulent » quand on change la résolution Q : en sondant plus fin, un quark apparaît accompagné des gluons qu'il a rayonnés. L'équation d'évolution DGLAP

$$\frac{\partial f_q(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) f_q(z, Q^2) + [\text{gluons}]$$

est une équation de transport-convolution : le « temps » est $\tau = \ln Q^2$, la « vitesse » est le noyau de branchement P_{qq} (probabilité qu'un quark émette un gluon et garde la fraction x/z), et la convolution est multiplicative (Mellin, chap. 5) : en moments $M_n(Q^2) = \int_0^1 x^{n-1} f(x, Q^2) dx$, l'équation devient *diagonale*, $\frac{dM_n}{d\tau} = \frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi} \gamma_n M_n$, résoluble le long des caractéristiques comme au début de ce chapitre. **Conséquence observable** : les fonctions de structure mesurées à HERA *dépendent* de Q^2 — la « violation d'invariance d'échelle » — exactement au rythme prédit : la pente $\partial F_2 / \partial \ln Q^2$ mesurée sur trois décades de Q^2 est l'un des tests les plus précis de QCD et fournit $\alpha_s(M_Z) = 0,118$. Le flot de renormalisation du chapitre 16 n'est rien d'autre que ce transport, abstrait de son contexte.

1.5 Exercices corrigés

Exercice 6.1 (★) — Transport avec absorption

Résoudre $\partial_t u + 2\partial_x u + u = 0$, $u(0, x) = \sin x$.

Solution détaillée

Caractéristiques $x = x_0 + 2t$; le long d'elles $\phi' = -\phi$, donc $u(t, x) = e^{-t} \sin(x - 2t)$: l'onde glisse à vitesse 2 en s'amortissant. Vérification directe immédiate. ✓

Exercice 6.2 (★★) — Équation d'âge (McKendrick)

La densité de population $n(t, a)$ d'âge a satisfait $\partial_t n + \partial_a n = -\mu(a)n$ avec la natalité $n(t, 0) = \int_0^\infty \beta(a)n(t, a)da$. Résoudre le long des caractéristiques et donner la condition de croissance exponentielle (équation d'Euler–Lotka).

Solution détaillée

(1) Caractéristiques $a = t + \text{const}$: pour $a > t$ (individus déjà nés) $n(t, a) = n_0(a - t)e^{-\int_{a-t}^a \mu}$; pour $a < t$, $n(t, a) = B(t - a)e^{-\int_0^a \mu}$ où $B(t) = n(t, 0)$. (2) La condition de bord donne l'équation de renouvellement $B(t) = \int_0^t \beta(a)e^{-\int_0^a \mu} B(t - a) da + (\text{source des anciens})$: une convolution de Volterra causale (chapitre 4!). (3) Cherchant $B \propto e^{rt}$: $1 = \int_0^\infty \beta(a)e^{-ra - \int_0^a \mu} da$ — Euler-Lotka ; le taux de Malthus r est l'unique racine réelle (le membre de droite décroît de R_0 à 0) : croissance ssi $R_0 > 1$. ✓

Exercice 6.3 (★★) — Hamilton–Jacobi et la formule de Hopf–Lax

Pour $\partial_t S + \frac{1}{2} |\nabla_x S|^2 = 0$, $S(0, \cdot) = S_0$ convexe lisse, vérifier que les caractéristiques sont les droites du mouvement libre et que $S(t, x) = \min_y [S_0(y) + \frac{|x-y|^2}{2t}]$ (Hopf–Lax) résout l'équation là où le minimiseur est unique. Relier à la limite semi-classique de Schrödinger.

Solution détaillée

(1) Système caractéristique de Hamilton–Jacobi avec $H = \frac{1}{2}|p|^2$: $\dot{x} = p$, $\dot{p} = 0$: droites $x = y + tp_0$, $p_0 = \nabla S_0(y)$, le long desquelles $S = S_0(y) + t(p \cdot \dot{x} - H) = S_0(y) + \frac{t}{2}|p_0|^2$. (2) Le minimum de Hopf–Lax : la condition d'optimalité en y est $\nabla S_0(y) = \frac{x-y}{t}$, soit exactement $x = y + t\nabla S_0(y)$ — le point atteint par la caractéristique ; et la valeur est $S_0(y) + \frac{|x-y|^2}{2t} = S_0(y) + \frac{t}{2} |\nabla S_0(y)|^2$: identique. La convexité garantit un minimiseur unique pour t petit. (3) Pour Schrödinger $i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi$, l'ansatz WKB $\psi = A e^{iS/\hbar}$ donne à l'ordre $\hbar^0$ exactement Hamilton–Jacobi pour S : *la phase quantique se transporte le long des trajectoires classiques*. C'est l'annonce de la méthode du col sur l'intégrale de chemin (chapitre 13) : l'action stationnaire sélectionne la trajectoire classique. ✓

Chapitre 2

Laplacien, fonctions de Green et potentiel newtonien

L'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_j \partial_{x_j}^2$ règne sur la physique statique : électrostatique, gravitation, membranes à l'équilibre, marches aléatoires stationnaires. Ce chapitre calcule sa solution élémentaire, en déduit le potentiel newtonien, et démontre les propriétés qualitatives (moyenne, maximum, régularité) qui font des fonctions harmoniques les objets les plus rigides de l'analyse.

Prérequis / rappel

Chapitres 4 (solutions élémentaires, théorème 4.10) et 1 (Green, cor. 1.12 ; intégrabilité des puissances, exemple 1.9). Une fonction est *harmonique* sur Ω si $\Delta u = 0$.

2.1 La solution élémentaire du laplacien

Théorème 2.1. *Posons, pour $x \neq 0$,*

$$E_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x| & N = 2, \\ -\frac{1}{(N-2)|S^{N-1}|} \frac{1}{|x|^{N-2}} & N \geq 3 \quad \left(= -\frac{1}{4\pi|x|} \text{ si } N = 3 \right). \end{cases} \quad (2.1)$$

Alors $E_N \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ et $\Delta E_N = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. **(1) Intégrabilité locale :** $|E_N| \sim |x|^{2-N}$ (ou $\log$), localement intégrable car $2-N > -N$ (exemple 1.9). **(2) Harmonicité hors de l'origine :** pour une fonction radiale $u(x) = v(r)$, $\Delta u = v'' + \frac{N-1}{r}v'$; avec $v = r^{2-N}$ (resp. $\log r$) : $v'' + \frac{N-1}{r}v' = (2-N)(1-N)r^{-N} + (N-1)(2-N)r^{-N} = 0$. **(3) La masse au centre :** pour $\varphi \in C_c^\infty$,

$$\langle \Delta E_N, \varphi \rangle = \int E_N \Delta \varphi \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} E_N \Delta \varphi \, dx$$

(convergence dominée, $E_N \in L_{\text{loc}}^1$). Sur le domaine $\{|x| > \varepsilon\}$, la formule de Green (cor. 1.12, la normale extérieure au domaine pointe vers l'origine) :

$$\int_{|x| > \varepsilon} (E_N \Delta \varphi - \underbrace{\Delta E_N \varphi}_{=0}) = \int_{|x| = \varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial E_N}{\partial r} - E_N \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) d\sigma.$$

(4) Second terme du bord : $|E_N(\varepsilon)| \cdot |S^{N-1}| \varepsilon^{N-1} \cdot \sup |\nabla \varphi| = \mathcal{O}(\varepsilon |E_N(\varepsilon)| \varepsilon^{N-2}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ ou $\mathcal{O}(\varepsilon \log \varepsilon) \rightarrow 0$. **(5) Premier terme :** $\frac{\partial E_N}{\partial r} = \frac{1}{|S^{N-1}|} r^{1-N}$ (dans les deux cas !), donc

$$\int_{|x| = \varepsilon} \varphi \frac{\partial E_N}{\partial r} \, d\sigma = \frac{1}{|S^{N-1}| \varepsilon^{N-1}} \int_{|x| = \varepsilon} \varphi \, d\sigma = \text{moyenne de } \varphi \text{ sur la sphère} \rightarrow \varphi(0).$$

D'où $\langle \Delta E_N, \varphi \rangle = \varphi(0)$. □

Intuition

$E_3 = -\frac{1}{4\pi|x|}$ est (au signe près) le potentiel coulombien d'une charge unité : le théorème dit exactement que le champ d'une charge ponctuelle a pour source δ_0 — la loi de Gauss de l'électrostatique, écrite proprement. La normalisation $\frac{1}{|S^{N-1}|}$ vient du flux : tout le flux du champ ∇E_N traverse chaque sphère, quelle que soit sa taille.

Corollaire 2.2 (Potentiel newtonien). *Pour $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ (ou $f \in C_c^\infty$), la fonction $u = E_N * f$ résout l'équation de Poisson $\Delta u = f$. En dimension 3 :*

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy.$$

C'est le théorème 4.10 appliqué mot pour mot.

2.2 Propriété de la moyenne et principe du maximum

Théorème 2.3 (Propriété de la moyenne). *Si u est harmonique sur Ω alors, pour toute boule $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$,*

$$u(x) = \frac{1}{|S^{N-1}|r^{N-1}} \int_{|y-x|=r} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy.$$

Démonstration. Posons $M(r)$ = moyenne sphérique de u sur $\partial B(x, r)$. En passant en coordonnées sphériques centrées en x puis en dérivant sous l'intégrale (paramétrer la sphère unité) :

$$M'(r) = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \omega \cdot \nabla u(x + r\omega) d\sigma(\omega) = \frac{1}{|S^{N-1}|r^{N-1}} \int_{B(x, r)} \Delta u dy = 0,$$

la deuxième égalité étant le théorème de la divergence. Donc $M(r)$ est constante = $\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = u(x)$ par continuité. La moyenne volumique s'en déduit en intégrant en r . □

Corollaire 2.4 (Principe du maximum fort). *Une fonction harmonique sur un ouvert connexe Ω qui atteint son maximum en un point intérieur est constante. En conséquence, sur Ω borné, $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$: les extrêmes vivent au bord.*

Démonstration. Si $u(x_0) = M = \sup_{\Omega} u$, la propriété de la moyenne volumique force $u \equiv M$ sur toute boule centrée en x_0 (une moyenne de valeurs $\leq M$ égale à M impose l'égalité p.p., puis partout par continuité) : l'ensemble $\{u = M\}$ est ouvert ; il est fermé par continuité ; par connexité c'est Ω . □

Corollaire 2.5 (Unicité du problème de Dirichlet). *Si $\Delta u_1 = \Delta u_2 = f$ dans Ω borné et $u_1 = u_2$ sur $\partial\Omega$, alors $u_1 = u_2$: appliquer le principe du maximum (et du minimum) à $u_1 - u_2$, harmonique et nulle au bord.*

Application physique

Interprétation probabiliste (marche aléatoire) : u harmonique $\iff u(x) = \mathbb{E}[u(x + \text{pas aléatoire isotrope})]$: la valeur au centre est la moyenne des valeurs voisines — c'est un jeu *équitable*. Le principe du maximum dit qu'un jeu équitable n'a pas de stratégie miracle intérieure ; la solution du problème de Dirichlet est $u(x) = \mathbb{E}_x[g(B_{\tau_{\partial\Omega}})]$ — la moyenne de la donnée au bord au point de première sortie du mouvement brownien. Le TD 7 vérifie cette représentation par simulation Monte-Carlo, contre la solution numérique

```
optimizr.poisson_2d_zero_boundary.
```

Théorème 2.6 (Régularité : harmonique $\Rightarrow$ analytique). *Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\Delta T = 0$ est (la distribution d'une) fonction C^∞ — et même analytique réelle. Plus généralement, Δ est hypoelliptique : $\text{singsupp}(T) = \text{singsupp}(\Delta T)$.*

Schéma de preuve. Régularisons : $T * \rho_\varepsilon$ est C^∞ et harmonique, donc vérifie la propriété de la moyenne ; en la moyennant contre la bosse radiale, $T * \rho_\varepsilon = T * \rho_{\varepsilon'}$ pour tous $\varepsilon, \varepsilon'$ sur un ouvert légèrement rétréci (la moyenne sphérique ne dépend pas du rayon). Donc $T = \lim T * \rho_\varepsilon = T * \rho_{\varepsilon_0}$ y est C^∞ . L'analyticité vient des bornes de Cauchy sur les dérivées obtenues en itérant la représentation en moyenne (Evans §2.2). L'hypoellipticité générale se lit sur la solution élémentaire : E_N est C^∞ hors de l'origine, et $T = E_N * (\Delta T)$ modulo lisse. $\square$

2.3 Fonction de Green du domaine et noyau de Poisson

Définition 2.7. La fonction de Green de Ω (Dirichlet) est $G_\Omega(x, y) = E_N(x - y) - h_y(x)$, où h_y est harmonique en x avec $h_y = E_N(\cdot - y)$ sur $\partial\Omega$: la correction qui annule G au bord.

Exemple 2.8 (Boule et méthode des images). Pour la boule $B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$, la charge image d'une charge unité en y est une charge $-R/|y|$ placée au point inversé $y^* = \frac{R^2}{|y|^2}y$:

$$G_B(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{R/|y|}{|x - y^*|} \right).$$

Vérification que $G_B = 0$ sur $|x| = R$: pour $|x| = R$, $|x - y^*| = \frac{R}{|y|}|x - y|$ (calcul direct : élever au carré et utiliser $|y||y^*| = R^2$). La dérivée normale de G_B au bord donne le *noyau de Poisson*

$$P(x, \omega) = \frac{R^2 - |x|^2}{|S^{N-1}|R|x - R\omega|^N}, \quad u(x) = \int_{S^{N-1}} P(x, \omega) g(R\omega) R^{N-1} d\sigma(\omega)$$

qui résout le problème de Dirichlet $\Delta u = 0$, $u|_{\partial B} = g$: une moyenne pondérée *explicite* de la donnée au bord — le prototype de toutes les formules de représentation.

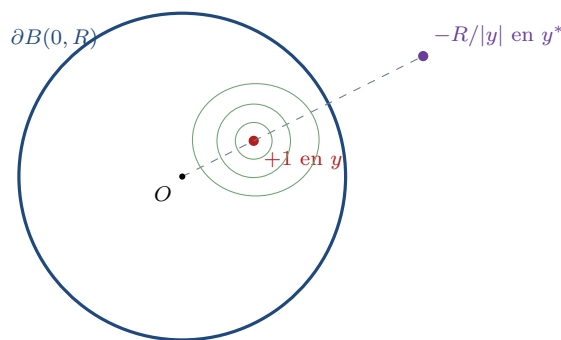


FIGURE 2.1 – Méthode des images pour la boule : la charge fictive au point inversé $y^* = R^2y/|y|^2$ annule exactement le potentiel sur la sphère. La fonction de Green du domaine encode la géométrie du bord.

Application finance / signal

Le potentiel de Yukawa $\frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|}$ — solution élémentaire de $-\Delta + m^2$ (exercice 5.2) — est aussi la fonction de covariance du *champ libre massif*, l'objet de base de la partie C : la

portée $1/m$ deviendra la *longueur de corrélation* ξ du chapitre 10. La divergence de ξ quand $m \rightarrow 0$ est la criticité.

Au notebook compagnon

TD 7 du notebook — équation de Poisson 2D résolue par `optimizr.poisson_2d_zero_boundary` (charge ponctuelle $\rightarrow$ Green discret, dipôle, quadrupôle); propriété de la moyenne vérifiée par marches aléatoires (Monte-Carlo); animation du potentiel lors du déplacement d'une charge dans une boîte (méthode des images).

2.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 2.9 (Le développement multipolaire : comment une molécule voit une autre de loin). Pour une source localisée ρ (support dans $|y| < a$), le potentiel à grande distance se développe en injectant $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{r^3} + \frac{3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y})^2 - y^2}{2r^3} \cdot \frac{1}{r} + \mathcal{O}(a^3/r^4)$ dans le potentiel newtonien (cor. 2.2) :

$$4\pi\epsilon_0 \Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{r^2} + \frac{Q_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j}{2r^3} + \dots, \quad Q = \int \rho, \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{y}\rho, \quad Q_{ij} = \int (3y_i y_j - y^2 \delta_{ij})\rho.$$

C'est le développement dual de celui de l'exemple 3.19 (la source vue comme somme de dérivées de δ) : terme à terme, $E_3 * \partial^\alpha \delta = \partial^\alpha E_3$. **Hiérarchie physico-chimique complète** : l'énergie d'interaction entre deux molécules décroît comme charge-charge $1/r$, charge-dipôle $1/r^2$, dipôle-dipôle $1/r^3$ (interaction de Keesom entre molécules d'eau, $\mathbf{p}_{\text{H}_2\text{O}} = 1,85 \text{ D}$: c'est elle qui structure l'eau liquide), dipôle-dipôle *induit* $1/r^6$ (van der Waals-London, qui fait tenir les geckos au plafond). La symétrie élague (chap. 17, principe de Curie) : CO_2 linéaire centrosymétrique a $\mathbf{p} = 0$ mais $Q_{zz} \neq 0$; CH_4 tétraédrique a $\mathbf{p} = 0$ et $Q = 0$ (premier moment non nul : octupôle) — d'où son point d'ébullition si bas (-161°C) : la table des groupes ponctuels se lit directement dans les températures d'ébullition.

Exemple 2.10 (Yukawa, écrantage de Debye et potentiel de Cornell : quand le laplacien prend une masse). Remplaçons $-\Delta$ par $-\Delta + \kappa^2$: la solution élémentaire devient (calcul par Fourier, chap. 5 : $\hat{E} = -1/(k^2 + \kappa^2)$, intégrale par résidus)

$$E_\kappa(x) = -\frac{e^{-\kappa|x|}}{4\pi|x|} :$$

le potentiel de Yukawa, de portée $1/\kappa$. **(a) Plasma / électrolyte** : autour d'une charge test, les porteurs mobiles se réarrangent ; la linéarisation de Poisson-Boltzmann donne exactement $(-\Delta + \kappa_D^2)\Phi = \rho/\epsilon$ avec $\kappa_D^2 = \sum_i n_i q_i^2 / \epsilon k_B T$: la longueur de Debye (0,7 nm dans l'eau de mer, 10 m dans le vent solaire) est la portée effective de l'électrostatique dans un milieu conducteur. **(b) Interaction nucléaire** : Yukawa (1935) postule que la portée $\sim 1,4 \text{ fm}$ de la force forte résulte de l'échange d'une particule de masse $\kappa\hbar/c \approx 140 \text{ MeV}$ — le pion, découvert en 1947 : la portée d'une force mesure la masse de son médiateur. La portée infinie de Coulomb $\Leftrightarrow$ photon sans masse (testé à $m_\gamma < 10^{-54} \text{ kg}$ par la survie des champs magnétiques galactiques). **(c) QCD et confinement** : entre un quark et un antiquark lourds, le potentiel mesuré (sur réseau, et via les spectres du charmonium) est celui de Cornell : $V(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s \hbar c}{r} + \sigma r$, avec $\sigma \approx 0,9 \text{ GeV/fm}$. Le premier terme est coulombien (échange de gluon, facteur 4/3 de couleur) ; le second, *linéaire*, n'est la fonction de Green d'aucun opérateur local en 3D : le flux chromoélectrique se concentre en un tube (corde) au lieu de s'étaler — séparer la paire coûte une énergie $\propto r$, il est énergétiquement préférable de créer une nouvelle paire $q\bar{q}$: aucun quark isolé n'est observable. La transition Coulomb $\rightarrow$ corde est le problème du confinement, non résolu analytiquement (problème du millénaire Yang-Mills).

2.5 Exercices corrigés

Exercice 7.1 (★) — Le potentiel d'une sphère chargée

Calculer $u = E_3 * \sigma_R$ où σ_R est la mesure uniforme de masse totale 1 sur la sphère $|x| = R$. Retrouver le théorème de Newton.

Solution détaillée

(1) Par symétrie, u est radiale; hors de la sphère elle est harmonique et tend vers 0 : $u = -\frac{c_{\pm}}{4\pi r}$ pour $r > R$, $u = c_0$ constante pour $r < R$ (seule harmonique radiale bornée en 0). (2) Le flux à travers une grande sphère (Gauss, $\Delta u = \sigma_R$ de masse 1) fixe $c_+ = 1$; la continuité en $r = R$ (le potentiel d'une couche simple est continu) donne $c_0 = -\frac{1}{4\pi R}$. (3) Théorème de Newton : à l'extérieur, tout se passe comme si la masse était au centre; à l'intérieur, le champ est nul (potentiel constant). ✓

Exercice 7.2 (★★) — Harnack et Liouville

Déduire du noyau de Poisson l'inégalité de Harnack : pour $u \geq 0$ harmonique sur $B(0, R)$,

$$\frac{R^{N-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{N-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{N-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{N-1}} u(0).$$

En déduire le théorème de Liouville : toute fonction harmonique bornée (ou seulement positive) sur $\mathbb{R}^N$ entier est constante.

Solution détaillée

(1) Encadrer le noyau de Poisson : $R - |x| \leq |x - R\omega| \leq R + |x|$, d'où $\frac{R^2 - |x|^2}{(R + |x|)^N} \leq P(x, \omega) |S^{N-1}| R \leq \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^N}$; intégrer contre $u \geq 0$ au bord et utiliser la moyenne $u(0)$. (2) Liouville : fixer x et faire $R \rightarrow \infty$ dans Harnack : les deux bornes tendent vers $u(0)$, donc $u(x) = u(0)$. Pour u bornée, appliquer à $u - \inf u \geq 0$. Conséquence physique : pas de champ électrostatique non trivial sans charge dans tout l'espace avec potentiel borné. ✓

Exercice 7.3 (★★★) — Développement multipolaire

Pour $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ de support dans $B(0, a)$, montrer que le potentiel $u = E_3 * f$ admet pour $|x| > a$ le développement

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{Q}{|x|} + \frac{p \cdot x}{|x|^3} + \mathcal{O}(|x|^{-3}) \right], \quad Q = \langle f, 1 \rangle, \quad p = \langle f, y \rangle,$$

et relier au théorème 3.18.

Solution détaillée

(1) Taylor du noyau en y autour de 0, pour $|x| > a \geq |y|$: $\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|} + \frac{x \cdot y}{|x|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{|y|^2}{|x|^3}\right)$, développement uniforme sur le support compact. (2) Appliquer f (prolongée à C^∞ , prop. 4.2(ii)) terme à terme : les coefficients sont les *moments* $Q = \langle f, 1 \rangle$ (charge totale), $p_i = \langle f, y_i \rangle$ (moment dipolaire), etc. (3) Lien avec le théorème 3.18 : vu de l'infini, f est indistinguable de $Q\delta_0 - p \cdot \nabla \delta_0 + \dots$ — la hiérarchie charge/dipôle/quadrupôle est

exactement la base $\{\partial^\alpha \delta_0\}$ des distributions ponctuelles : le développement multipolaire est le développement de Taylor *dual*. ✓

Chapitre 3

L'équation de la chaleur et le mouvement brownien

L'équation de la chaleur est le pont entre la partie B et la partie C : son noyau gaussien est à la fois la solution élémentaire d'une EDP, la densité de transition du mouvement brownien, et — après rotation de Wick $t \rightarrow -it$ — le propagateur de la mécanique quantique. La maîtriser, c'est déjà faire de l'intégrale de chemin sans le savoir.

Prérequis / rappel

Transformation de Fourier (chapitre 5), en particulier la gaussienne (5.5) et le produit de convolution (5.3) ; solutions élémentaires (définition 4.9).

3.1 Le noyau de la chaleur

Théorème 3.1 (Résolution du problème de Cauchy). *Le problème $\partial_t u = \kappa \Delta u$ sur $(0, \infty) \times \mathbb{R}^N$, $u(0, \cdot) = u_0 \in L^2$ (ou $\mathcal{S}'$ tempérée), admet pour solution*

$$u(t, \cdot) = K_t * u_0, \quad K_t(x) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}}. \quad (3.1)$$

De plus $E(t, x) = H(t)K_t(x)$ est la solution élémentaire causale : $(\partial_t - \kappa\Delta)E = \delta_{(0,0)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+N})$.

Démonstration. (1) Fourier en x : $\partial_t \hat{u} = -\kappa|\xi|^2 \hat{u}$, EDO résolue par $\hat{u}(t, \xi) = e^{-\kappa t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$. (2) $e^{-\kappa t|\xi|^2}$ est la transformée de K_t par (5.5) (avec $a = \frac{1}{4\kappa t}$) ; le produit devient convolution par (5.3) : c'est (3.1). (3) Solution élémentaire : pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+N})$,

$$\langle (\partial_t - \kappa\Delta)E, \varphi \rangle = - \int_0^\infty \int K_t(\partial_t \varphi + \kappa\Delta \varphi) dx dt$$

(transfert des dérivées ; le signe de Δ ne change pas, deux IPP). On intègre sur $t > \varepsilon$ puis $\varepsilon \rightarrow 0$: le terme intérieur s'annule car K_t résout l'équation ; le terme de bord en $t = \varepsilon$ vaut $\int K_\varepsilon \varphi(\varepsilon, x) dx \rightarrow \varphi(0, 0)$ car K_ε est une approximation gaussienne de l'unité (prop. 3.8). $\square$

Intuition

Trois lectures du noyau (3.1) : (i) EDP : une source ponctuelle de chaleur s'étale en gaussienne de largeur $\sqrt{2\kappa t}$ — l'étalement en $\sqrt{t}$ est la signature diffusive (contre t pour le transport). (ii) Probabilités : $K_t(x - y)$ est la densité de probabilité qu'un brownien parti de y soit en x à l'instant t : l'équation de la chaleur est l'équation d'évolution de la loi

du brownien (Fokker–Planck sans dérive). (iii) *Semi-groupe* : $K_t * K_s = K_{t+s}$ (les gaussiennes se convolent en additionnant les variances) : propriété de Chapman–Kolmogorov, qui deviendra la *composition des propagateurs* — le cœur de la construction de l'intégrale de chemin au chapitre 13.

Proposition 3.2 (Propriétés qualitatives). (i) Régularisation instantanée : pour $t > 0$, $u(t, \cdot) \in C^\infty$ même si u_0 est seulement L^2 (ou une mesure). (ii) Vitesse infinie : si $u_0 \geq 0$ non nulle à support compact, alors $u(t, x) > 0$ pour tout x dès que $t > 0$. (iii) Décroissance : $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq (4\pi\kappa t)^{-N/2} \|u_0\|_{L^1}$ et $\|u(t)\|_{L^2}$ décroît. (iv) Irréversibilité : le problème rétrograde ($t < 0$) est mal posé — une donnée L^2 générique n'a aucune solution en amont.

Démonstration. (i) : convolution avec le facteur lisse gaussien (prop. 2.5(iv)) ; en Fourier, $e^{-\kappa t|\xi|^2} \widehat{u}_0$ décroît plus vite que tout polynôme. (ii) : le noyau est strictement positif partout. (iii) : Young (2.5)(ii) et $\|K_t\|_{L^1} = 1$, $\|K_t\|_{L^\infty} = (4\pi\kappa t)^{-N/2}$; en L^2 , $|\widehat{u}| = e^{-\kappa t|\xi|^2} |\widehat{u}_0| \leq |\widehat{u}_0|$ et Plancherel. (iv) : résoudre en arrière exigerait multiplier $\widehat{u}_0$ par $e^{+\kappa t|\xi|^2}$, qui n'est tempéré pour aucune donnée non triviale à spectre plein — l'irréversibilité thermodynamique est ici un fait d'analyse harmonique. $\square$

Attention — piège classique

La « vitesse infinie de propagation » (ii) viole la relativité : la chaleur est une équation *effective*, valable aux échelles où le libre parcours moyen est négligeable. Les queues gaussiennes $e^{-x^2/4\kappa t}$ sont toutefois si minces que la causalité pratique est restaurée à toute échelle macroscopique.

3.2 Du marcheur aléatoire à la diffusion

Proposition 3.3 (Limite diffusive de la marche aléatoire). Soit un marcheur sur $a\mathbb{Z}$ sautant de $\pm a$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ tous les τ . Notons $P_n(k)$ la loi au temps $n\tau$. Si $a, \tau \rightarrow 0$ avec $\kappa = \frac{a^2}{2\tau}$ fixé, alors la densité interpolée converge vers la solution de $\partial_t P = \kappa \partial_x^2 P$.

Démonstration. La récurrence $P_{n+1}(k) = \frac{1}{2}P_n(k-1) + \frac{1}{2}P_n(k+1)$ se réécrit

$$\frac{P_{n+1}(k) - P_n(k)}{\tau} = \frac{a^2}{2\tau} \frac{P_n(k+1) - 2P_n(k) + P_n(k-1)}{a^2}.$$

Le membre de droite est κ fois le laplacien discret ; le développement de Taylor à l'ordre 2 (pour un profil régulier) donne $\partial_t P = \kappa \partial_x^2 P + \mathcal{O}(a^2)$. La convergence rigoureuse est le théorème central limite (chaque position est une somme de n pas i.i.d.), ou le théorème de Donsker au niveau des trajectoires. $\square$

Application physique — Einstein 1905

La relation $\kappa = \frac{a^2}{2\tau}$ relie le coefficient de diffusion macroscopique aux paramètres microscopiques du choc moléculaire : mesurer κ (grain de pollen de Brown) et la viscosité donne le nombre d'Avogadro — l'argument d'Einstein qui a convaincu de l'existence des atomes. La relation moderne $\kappa = \mu k_B T$ (Einstein–Smoluchowski, mobilité $\times$ température) est le premier exemple du *théorème fluctuation–dissipation* que l'on démontrera en toute généralité au chapitre 15.

3.3 Fokker–Planck : diffusion avec dérive

Définition 3.4 (Équation de Fokker–Planck / Smoluchowski). Pour une particule suramortie dans un potentiel V à température T (bruit $\sqrt{2\kappa}$, $\kappa = k_B T / \gamma$) :

$$\partial_t P = \partial_x \left(\frac{V'(x)}{\gamma} P \right) + \kappa \partial_x^2 P = \partial_x \left[\kappa e^{-V/k_B T} \partial_x (e^{V/k_B T} P) \right]. \quad (3.2)$$

Proposition 3.5. La densité stationnaire de (3.2) (si normalisable) est la mesure de Gibbs

$$P_\infty(x) = \frac{1}{Z} e^{-V(x)/k_B T}, \quad Z = \int e^{-V/k_B T} dx,$$

et toute donnée initiale y converge (potentiel confinant).

Démonstration. La forme « divergence » de (3.2) montre que $P_\infty \propto e^{-V/k_B T}$ annule le courant $J = -\kappa e^{-V/k_B T} \partial_x (e^{V/k_B T} P)$: stationnaire. Convergence : la fonctionnelle d'entropie relative $D(P \| P_\infty) = \int P \log \frac{P}{P_\infty}$ décroît ($\frac{dD}{dt} = -\int \frac{J^2}{\kappa P} \leq 0$, calcul direct) et ne s'annule qu'en $P = P_\infty$: c'est un théorème H. La vitesse est gouvernée par le *trou spectral* de l'opérateur de Fokker–Planck, relié au temps de Kramers $e^{\Delta V/k_B T}$ pour un double puits. $\square$

Idée-clé

(3.2) est la passerelle dynamique vers la partie C : la mesure de Gibbs $e^{-V/k_B T}/Z$ — objet central de la physique statistique (chapitre 10) — est le point fixe d'une diffusion. Échantillonner Gibbs en simulant la diffusion, c'est l'algorithme de *Langevin Monte-Carlo* ; le faire par chaîne de Markov discrète, c'est *Metropolis* (TD 8, `optimizr.mcmc_sample`). La théorie des champs euclidienne utilisera exactement la même structure avec $V \rightarrow S[\phi]$ (action fonctionnelle).

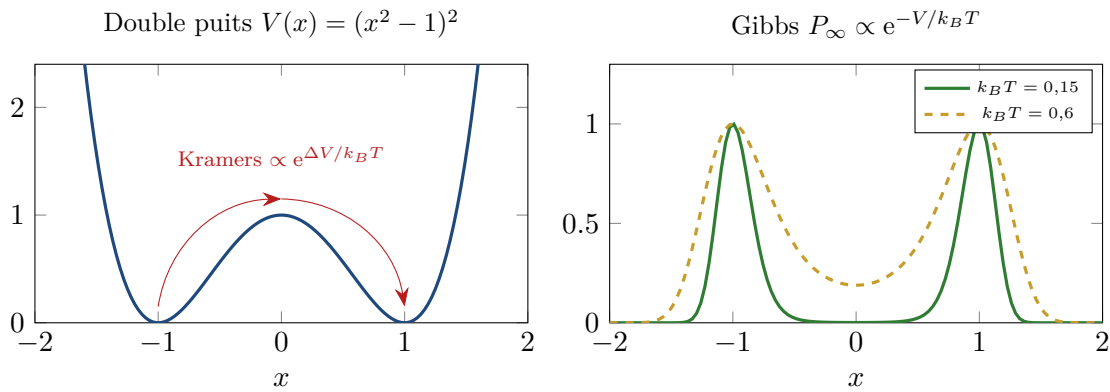


FIGURE 3.1 – Diffusion dans un double puits : à basse température, la mesure de Gibbs se concentre dans les deux vallées et le passage thermique suit la loi d'Arrhenius–Kramers. Ce paysage réapparaîtra à l'identique pour l'instanton quantique (chapitre 13).

Application finance / signal

Le modèle de Black–Scholes est une équation de la chaleur : le changement de variables $S = e^x$, $\tau = T - t$ transforme l'EDP de pricing en $\partial_\tau u = \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 u + \dots$, et la formule fermée n'est autre que la convolution (3.1) contre le payoff. Les diffusions à dérive (3.2) modélisent les taux courts (Vasicek = Ornstein–Uhlenbeck), et le temps de Kramers gouverne les transitions de régime. TD 8 : `optimizr.fokker_planck_constant` contre solution exacte

OU, et échantillonnage de Gibbs par `mcmc_sample`.

Au notebook compagnon

TD 8 du notebook — animation du noyau de la chaleur (étalement $\sqrt{t}$, régularisation d'un créneau) ; marche aléatoire $\rightarrow$ diffusion (Donsker visuel) ; Fokker–Planck double puits (`optimizr.fokker_planck_constant`) : relaxation vers Gibbs *animée* et temps de Kramers vs $1/T$; Metropolis (`optimizr.mcmc_sample`) sur le même potentiel.

3.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 3.6 (La conduction thermique dans un cristal : le tenseur que la symétrie autorise). Dans un cristal anisotrope, la loi de Fourier devient $\mathbf{q} = -\lambda_{ij}\partial_j T$ et l'équation de la chaleur $\partial_t T = D_{ij}\partial_i\partial_j T$. Le principe de Curie (chap. 17, exemple 17.4) contraint D_{ij} : pour le graphite (hexagonal), $D_{\parallel}$ et $D_{\perp}$ seulement, avec un contraste géant $\lambda_{\text{plan}} \approx 2000$ W/m/K (meilleur que le cuivre, 401 W/m/K) contre $\lambda_{\perp} \approx 6$ W/m/K : les feuillets conduisent, l'empilement isole. **Résolution explicite** : le changement de variables linéaire $x'_i = x_i/\sqrt{D_i}$ (axes propres, chap. 1) ramène au laplacien isotrope : le noyau est une gaussienne *anisotrope*

$$K_t(\mathbf{x}) = \frac{\exp(-\frac{1}{4}t^{-1}\sum_i x_i^2/D_i)}{(4\pi t)^{3/2}\sqrt{D_1 D_2 D_3}} :$$

une impulsion laser ponctuelle sur du graphite s'étale en ellipse de demi-axes $\sqrt{2D_i t}$ (rapport $\sqrt{2000/6} \approx 18$) : c'est la méthode « laser flash » qui cartographie D_{ij} , et le principe des films de graphite qui étalent la chaleur des smartphones *latéralement* sans cuire la batterie en dessous.

Exemple 3.7 (Le temps propre de Schwinger : la chaleur au cœur des boucles de Feynman). L'identité élémentaire $\frac{1}{A} = \int_0^\infty e^{-sA} ds$ ($A > 0$), appliquée au propagateur euclidien $A = k^2 + m^2$, s'écrit

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty ds e^{-s(k^2 + m^2)} :$$

le propagateur est la transformée de Laplace du *noyau de la chaleur* e^{-sk^2} — le paramètre s (« temps propre de Schwinger ») diffuse la particule le long de sa ligne d'univers. **Pourquoi c'est puissant** : dans une boucle de Feynman (chap. 12), l'intégrale sur k devient *gaussienne* à s fixé — on intègre exactement grâce au chapitre 1 — et toute la difficulté se concentre dans l'intégrale sur s : la divergence ultraviolette ($k \rightarrow \infty$) devient une divergence en $s \rightarrow 0$ (temps de diffusion courts, petites distances), régularisée proprement en coupant $s > 1/\Lambda^2$ ou par continuation dimensionnelle ($d^4 k \rightarrow d^d k$: le noyau de la chaleur en dimension d donne $(4\pi s)^{-d/2}$, fonction *analytique* de d). **Application : l'effet Euler–Heisenberg** : l'énergie du vide de QED dans un champ magnétique constant se calcule par le noyau de la chaleur de l'opérateur de Dirac dans ce champ (spectre de Landau, calculable exactement) : $\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{2\alpha^2}{45m^4} [(E^2 - B^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] + \dots$ — les invariants de Lorentz du chapitre 18 apparaissent seuls, comme la symétrie l'exige : la lumière diffuse sur la lumière (mesuré par ATLAS dans les collisions Pb–Pb, 2017). La « simple » équation de la chaleur de ce chapitre est ainsi l'outil de calcul standard des actions effectives en théorie des champs.

3.5 Exercices corrigés

Exercice 8.1 (★) — Semi-groupe et moments

Vérifier $K_t * K_s = K_{t+s}$ par Fourier, puis calculer $\int x^2 K_t(x) dx$ en dimension 1 et retrouver $\langle x^2 \rangle = 2\kappa t$.

Solution détaillée

(1) $\widehat{K}_t = e^{-\kappa t |\xi|^2}$: $\widehat{K}_t \widehat{K}_s = e^{-\kappa(t+s)|\xi|^2} = \widehat{K_{t+s}}$; l'injectivité de $\mathcal{F}$ conclut. (2) Gaussienne de variance $\sigma^2 = 2\kappa t$ (comparer (3.1) à la densité normale) : le déplacement quadratique moyen croît *linéairement* en temps — diffusion normale. Toute anomalie ($\langle x^2 \rangle \sim t^{2H}$, $H \neq \frac{1}{2}$) signale mémoire ou milieux désordonnés : cf. fBm au TD 5. ✓

Exercice 8.2 (★★) — Solution d'Ornstein–Uhlenbeck

Résoudre $\partial_t P = \partial_x(\theta x P) + \kappa \partial_x^2 P$ (potentiel quadratique $V = \frac{\gamma}{2} x^2$) avec $P(0, \cdot) = \delta_{x_0}$, par l'ansatz gaussien.

Solution détaillée

(1) Ansatz $P = \mathcal{N}(m(t), v(t))$: injecter et identifier donne $\dot{m} = -\theta m$, $\dot{v} = -2\theta v + 2\kappa$. (2) $m(t) = x_0 e^{-\theta t}$, $v(t) = \frac{\kappa}{\theta}(1 - e^{-2\theta t})$. (3) $t \rightarrow \infty$: $\mathcal{N}(0, \kappa/\theta)$ — la Gibbs du potentiel quadratique, conformément à la prop. 3.5 ; le taux de relaxation est θ (trou spectral exact). C'est le processus de retour-à-la-moyenne de la finance (Vasicek, paires), et le propagateur euclidien de l'oscillateur harmonique du chapitre 13 aura exactement cette forme. ✓

Exercice 8.3 (★★★) — Formule de Duhamel et chaleur forcée

Résoudre $\partial_t u - \kappa \Delta u = f(t, x)$, $u(0) = 0$, et montrer l'estimation de régularité maximale $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \int_0^t (4\pi\kappa(t-s))^{-N/2} \|f(s)\|_{L^1} ds$; en déduire que pour $N \leq 1$... les sources intégrables en temps donnent u borné si $N = 1$ et $f \in L_t^\infty L_x^1$? Discuter selon N .

Solution détaillée

(1) Duhamel (superposition des réponses aux impulsions à chaque instant s) : $u(t) = \int_0^t K_{t-s} * f(s) ds$; vérification par dérivation sous l'intégrale + limite $K_{t-s} \rightarrow \delta$ quand $s \rightarrow t$. (2) Young $L^1 * L^1 \rightarrow L^1$... ici $\|K_{t-s} * f(s)\|_{L^\infty} \leq \|K_{t-s}\|_{L^\infty} \|f(s)\|_{L^1}$ donne l'estimation annoncée. (3) L'intégrale $\int_0^t (t-s)^{-N/2} ds$ converge ssi $N < 2$: en dimension 1 la réponse reste bornée ; dès $N \geq 2$, une source entretenue peut faire diverger la température au point source (logarithmiquement en $N = 2$) — le même comptage de puissances qui rend les théories de champs *super-renormalisables* en $d < 2$... l'analogie dimensionnelle deviendra précise au chapitre 12. ✓

Chapitre 4

Ondes et Schrödinger : propagation et dispersion

Dernier chapitre de la partie B : les deux équations d'évolution *réversibles*. L'équation des ondes propage à vitesse finie avec le principe de Huygens ; l'équation de Schrödinger disperse. Leur comparaison avec la chaleur (chapitre 3) éclaire d'un coup toute la classification des EDP — et la rotation de Wick qui les relie est le passage euclidien $\leftrightarrow$ temps réel de la partie C.

Prérequis / rappel

Chapitres 5 et 3. On notera $\square = \partial_t^2 - c^2 \Delta$ (d'Alembertien).

4.1 Corde vibrante : d'Alembert

Théorème 4.1 (Formule de d'Alembert, $N = 1$). *La solution de $\square u = 0$, $u(0) = u_0 \in C^2$, $\partial_t u(0) = u_1 \in C^1$ est*

$$u(t, x) = \frac{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy. \quad (4.1)$$

Démonstration. **(1)** Factorisation $\square = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$: en posant $v = (\partial_t + c\partial_x)u$, on a deux équations de transport en cascade (chapitre 1). **(2)** Les variables du cône $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ donnent $\partial_\xi \partial_\eta u = 0$, d'où $u = F(\xi) + G(\eta)$: superposition d'une onde droite et d'une onde gauche. **(3)** Les données initiales fixent $F + G = u_0$ et $c(G' - F') = u_1$: résoudre ce système linéaire donne (4.1). L'unicité vient de la factorisation en transports, chacun à solution unique (théorème 1.1). $\square$

Intuition

Deux différences fondamentales avec la chaleur : *(i) vitesse finie* : $u(t, x)$ ne dépend que des données dans l'intervalle $[x - ct, x + ct]$ — le *domaine de dépendance* ; aucune information ne dépasse la vitesse c ; *(ii) aucune régularisation* : un pli dans u_0 se propage indéfiniment le long des caractéristiques (les singularités voyagent sur le cône de lumière) : l'équation est réversible, l'entropie ne croît pas.

4.2 Dimension 3 : moyennes sphériques et Huygens

Théorème 4.2 (Formule de Kirchhoff, $N = 3$). *En dimension 3, la solution de $\square u = 0$, $u(0) = u_0$, $\partial_t u(0) = u_1$ (assez régulières) est*

$$u(t, x) = \partial_t \left[t \overline{u_0}(x, ct) \right] + t \overline{u_1}(x, ct), \quad \overline{f}(x, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} f(y) d\sigma(y). \quad (4.2)$$

La solution élémentaire causale de $\square$ est la couche sphérique

$$E_+(t, x) = \frac{H(t)}{4\pi c^2 t} \delta(|x| - ct) \quad (\text{mesure uniforme sur la sphère } |x| = ct).$$

Schéma de preuve. (1) *Équation d'Euler–Poisson–Darboux* : la moyenne sphérique $\overline{u}(x, r, t)$ d'une solution vérifie $\partial_t^2(r\overline{u}) = c^2 \partial_r^2(r\overline{u})$ — une équation des ondes *unidimensionnelle* en la variable r ! (Calcul : dériver la moyenne comme au théorème 2.3, le laplacien radial $\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r$ devient ∂_r^2 après multiplication par r .) (2) On résout par d'Alembert (4.1) sur la demi-droite $r > 0$ avec la condition $r\overline{u}|_{r=0} = 0$ (réflexion impaire), puis on extrait $u(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \overline{u}(x, r, t)$: le calcul des termes donne (4.2). (3) La solution élémentaire s'obtient en appliquant (4.2) à $u_0 = 0$, $u_1 = \delta$ (au sens distributionnel, en régularisant) : la moyenne sphérique de δ est la couche uniforme. (Détails : Golse ch. 11.3.) $\square$

Idée-clé — Principe de Huygens fort

En dimension 3 (et toute dimension *impaire* ≥ 3), la solution élémentaire est portée par le cône *exactement* ($|x| = ct$) : un flash ponctuel produit une onde qui passe puis *s'éteint complètement* — le signal est net. En dimension 2 (descente de Hadamard : intégrer (4.2) sur une droite), le support est le cône *plein* $|x| \leq ct$: une pierre dans l'étang laisse des ondulations persistantes. En dimension 1 aussi (l'intégrale de (4.1) traîne). Nous entendons proprement parce que l'espace a trois dimensions.

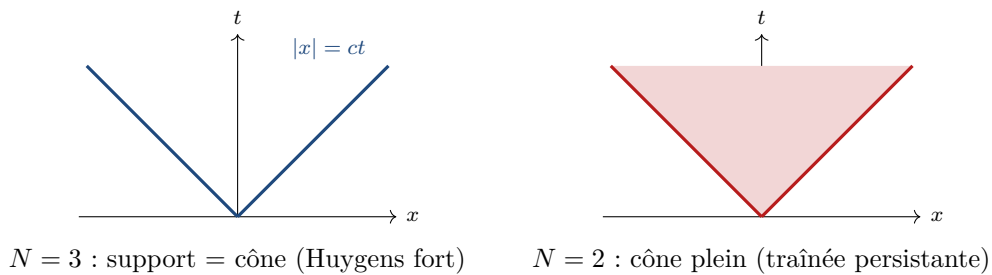


FIGURE 4.1 – Support de la solution élémentaire des ondes : net en dimension impaire ≥ 3 , traînant en dimension paire.

Proposition 4.3 (Conservation de l'énergie). *Pour u solution régulière décroissante à l'infini,*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\partial_t u|^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx = \text{constante}.$$

Démonstration. $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int (\partial_t u \partial_t^2 u + c^2 \nabla u \cdot \nabla \partial_t u) = \int \partial_t u (\partial_t^2 u - c^2 \Delta u) = 0$, après IPP (1.3) sur le second terme. $\square$

4.3 Schrödinger libre : dispersion

Théorème 4.4 (Propagateur libre de Schrödinger). *Le problème $i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$, $\psi(0) = \psi_0 \in \mathcal{S}$, est résolu par $\psi(t) = U_t * \psi_0$ avec*

$$U_t(x) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{N/2} \exp\left(\frac{im|x|^2}{2\hbar t} \right), \quad (4.3)$$

et l'évolution conserve la norme L^2 (unitarité) tout en dispersant : $\|\psi(t)\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{m}{2\pi \hbar |t|} \right)^{N/2} \|\psi_0\|_{L^1}$.

Démonstration. (1) Fourier : $\widehat{\psi}(t, \xi) = e^{-i\hbar t |\xi|^2 / 2m} \widehat{\psi}_0(\xi)$ — module 1, donc $\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2}$ par Plancherel (unitarité). (2) (4.3) est la gaussienne (5.5) prolongée à $a = \frac{i\hbar t}{2m}$ imaginaire pur : le prolongement est licite par holomorphicité en a sur $\{\operatorname{Re} a > 0\}$ et continuité au bord (au sens $\mathcal{S}'$) : on approche par $a_\varepsilon = \varepsilon + \frac{i\hbar t}{2m}$ et on passe à la limite — c'est la rotation de Wick, ici démontrée et non postulée. (3) La borne L^∞ : module du noyau constant $= \left(\frac{m}{2\pi \hbar |t|} \right)^{N/2}$, puis Young. $\square$

Intuition

Comparons les trois noyaux :

$$\underbrace{K_t \propto e^{-x^2/4\kappa t}}_{\text{chaleur : amortit}} \quad \underbrace{U_t \propto e^{+imx^2/2\hbar t}}_{\text{Schrödinger : oscille}} \quad \underbrace{E_+ \propto \delta(|x| - ct)}_{\text{ondes : transporte}}.$$

Schrödinger, c'est la chaleur *en temps imaginaire* ($t \rightarrow it$) : mêmes gaussiennes, mais la décroissance devient oscillation, la perte L^2 devient unitarité, et la dissipation devient *dispersion* — les composantes rapides (ξ grand) voyagent plus vite (vitesse de groupe $\hbar\xi/m$), le paquet s'étale en gardant sa norme. Cette correspondance $t \leftrightarrow it$ (Wick) sera notre pont officiel entre mécanique quantique et physique statistique : $e^{-iHt/\hbar} \leftrightarrow e^{-\beta H}$ (chapitre 13).

Application physique

Étalement d'un paquet gaussien de largeur initiale σ : $\sigma(t) = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma^2} \right)^2}$ (calcul gaussien direct avec (4.3)). Un électron localisé à l'ångström s'étale au millimètre en $\sim 10^{-8}$ s : la localisation quantique est instable, et c'est la mesure (ou la décohérence) qui relocalise. Le TD 9 anime cet étalement et vérifie la loi $\sigma(t)$.

Au notebook compagnon

TD 9 du notebook — animation comparée des trois équations sur la même donnée initiale (créneau + paquet gaussien) : chaleur (lisse et amortit), ondes (transporte, Huygens en 1D vs 3D par moyennes sphériques), Schrödinger (disperse, oscille — méthode split-step Fourier) ; loi d'étalement $\sigma(t)$ vérifiée par ajustement (`optimizr.grid_search`).

4.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 4.5 (Le rayonnement dipolaire : de l'antenne au bleu du ciel). Une source oscillante compacte ($\dot{\mathbf{p}}(t)$, taille $a \ll \lambda$) rayonne, via les potentiels retardés de l'exemple 4.13, le champ lointain

$$\mathbf{E}_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} [\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c))], \quad P = \frac{\mu_0 \langle |\dot{\mathbf{p}}|^2 \rangle}{6\pi c} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c} :$$

la puissance croît comme ω^4 . **Trois conséquences à travers dix-huit ordres de grandeur :** (a) *le ciel est bleu* : une molécule d'air, polarisable, se comporte en dipôle induit $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{soleil}}$; la section efficace de diffusion Rayleigh hérite du ω^4 : le bleu (450 nm) diffuse $(700/450)^4 \approx 5,9$ fois plus que le rouge — et le soleil couchant, vu à travers 40 fois plus d'air, est rouge par soustraction ; (b) *l'antenne demi-onde* : résistance de rayonnement $R_{\text{ray}} = 73 \Omega$ — c'est pourquoi les câbles coaxiaux font 75Ω ; (c) *la raie à 21 cm* : la transition hyperfine de H est dipolaire *magnétique* (dipôle électrique interdit par parité, exercice 17.2), supprimée par $(v/c)^2$: durée de vie $\tau \approx 11$ Millions — assez long pour que l'hydrogène galactique ne se soit pas éteint, assez intense à l'échelle d'une galaxie pour cartographier sa rotation (et découvrir la matière noire). Les règles de sélection du chapitre 17 décident qui rayonne.

Exemple 4.6 (Doppler relativiste et aberration : la phase est un scalaire). La phase d'une onde plane, $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_\mu x^\mu$, compte des crêtes : c'est un invariant de Lorentz, donc $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ est un quadrivecteur (chap. 18, exercice 18.3). Boostons à la vitesse v : $\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta)$ (Doppler) et $\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}$ (aberration). (a) *Le dipôle du fond diffus* : le CMB est isotrope dans son référentiel ; notre mouvement ($v_\odot = 370$ km/s, $\beta \approx 1,2 \times 10^{-3}$) le module en $T(\theta) = T_0(1 + \beta \cos \theta)$: le dipôle de 3,36 mK mesuré par COBE/Planck — on lit notre vitesse absolue par rapport à l'univers jeune directement dans la formule de Doppler. (b) *Phare relativiste* : pour $\gamma \gg 1$, l'aberration comprime tout l'hémisphère avant dans un cône $\theta' \sim 1/\gamma$: un électron de 1 GeV au synchrotron ($\gamma \approx 2000$) émet dans 0,5 mrad — combiné au ω^4 dipolaire vu dans le référentiel tournant, c'est ce qui fait des anneaux synchrotron les sources X les plus brillantes (chap. 18, §18.6) ; le TD 18 trace l'aplatissement du diagramme d'émission quand β croît. (c) *Jets superlumineux apparents* : un blazar dont le jet ($\beta \approx 0,998$) pointe presque vers nous montre des nœuds se déplaçant à $v_{\text{app}} = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} c$ jusqu'à $\sim 15c$ — pure cinématique de temps retardé, aucune violation causale : l'intervalle (18.1) veille.

4.5 Exercices corrigés

Exercice 9.1 (*) — Corde pincée

Résoudre la corde infinie avec $u_0 =$ tente de hauteur h sur $[-a, a]$, $u_1 = 0$; dessiner u à $t = a/2c, a/c, 2a/c$.

Solution détaillée

Par (4.1), $u = \frac{1}{2}[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)]$: la tente se scinde en deux demi-tentes d'amplitude $h/2$ partant en sens opposés ; à $t = a/c$ elles se séparent exactement ; ensuite deux tentes disjointes glissent. Aucun étalement, aucune atténuation : transport pur. ✓

Exercice 9.2 (**) — Énergie équipartie

Montrer que pour la corde ($N = 1$), après le temps de séparation ($t >$ diamètre du support/ $2c$), l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \int |\partial_t u|^2$ et l'énergie potentielle $\frac{c^2}{2} \int |\partial_x u|^2$ sont *exactement égales*.

Solution détaillée

(1) $u = F(x-ct) + G(x+ct)$: $\partial_t u = -cF' + cG'$, $\partial_x u = F' + G'$. (2) Après séparation, les supports de $F'(\cdot - ct)$ et $G'(\cdot + ct)$ sont disjointes : les termes croisés $\int F'G'$ s'annulent. (3) Alors $\int |\partial_t u|^2 = c^2 \int (F'^2 + G'^2) = c^2 \int |\partial_x u|^2$: équipartition exacte. C'est un théorème général (equipartition of energy) valable asymptotiquement en toute dimension — l'analogue

dynamique du théorème du viriel. ✓

Exercice 9.3 (★★) — Rotation de Wick explicite

Vérifier que $K_{i\tau}^{(\text{chaleur})}$ prolongé ($\kappa = \frac{\hbar}{2m}$, $t \rightarrow i\tau$) redonne (4.3), puis montrer que le noyau de Mehler de l'oscillateur harmonique euclidien

$$K_{\tau}^{\text{osc}}(x, y) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\omega\tau)}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} \frac{(x^2 + y^2) \cosh(\omega\tau) - 2xy}{\sinh(\omega\tau)}\right)$$

se réduit au noyau libre quand $\omega \rightarrow 0$ et donne, pour $\tau \rightarrow \infty$, l'état fondamental gaussien.

Solution détaillée

(1) Substitution directe : $4\kappa t \rightarrow 4\frac{\hbar}{2m}(i\tau) = \frac{2i\hbar\tau}{m}$, donc $e^{-x^2/4\kappa t} \rightarrow e^{+imx^2/2\hbar\tau}$ et le préfacteur $(4\pi\kappa t)^{-1/2} \rightarrow (2\pi i\hbar\tau/m)^{-1/2}$: c'est (4.3). ✓ (2) $\omega \rightarrow 0$: $\sinh \omega\tau \sim \omega\tau$, $\cosh \rightarrow 1$; l'exposant devient $-\frac{m}{2\hbar\tau}(x - y)^2$ et le préfacteur $\sqrt{m/2\pi\hbar\tau}$: noyau de la chaleur libre. ✓ (3) $\tau \rightarrow \infty$: $\cosh, \sinh \sim \frac{1}{2}e^{\omega\tau}$, l'exposant tend vers $-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2)$ et $K_{\tau}^{\text{osc}} \sim e^{-\omega\tau/2} \psi_0(x)\psi_0(y) \cdot \text{const}$ avec $\psi_0 \propto e^{-m\omega x^2/2\hbar}$: le propagateur euclidien à grand temps projette sur l'état fondamental, et le taux $e^{-\omega\tau/2}$ lit l'énergie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. Ce mécanisme — extraire le fondamental par temps imaginaire long — est la méthode de calcul de la partie C (et des simulateurs Monte Carlo quantiques). ✓

