

Cours III — Théorie statistique des champs

Intégrale fonctionnelle, diagrammes, renormalisation (chapitres 10–16)

HFThot Research Lab

d'après P. Simon (Théorie statistique des champs) et F. Golse (POLY431)

Juillet 2026

Présentation

Partie III du cours *Des distributions à la théorie statistique des champs*. C'est le cours de théorie statistique des champs proprement dit : physique statistique d'équilibre, intégrale fonctionnelle gaussienne, point col et diagrammes de Feynman, intégrale de chemin et instantons, états cohérents et variables de Grassmann, réponse linéaire et formule de Kubo, groupe de renormalisation. Elle réutilise constamment les parties I et II. Chaque chapitre se termine par des exercices corrigés gradués.

Table des matières

1	Physique statistique d'équilibre : fonctions de corrélation et réponse	1
1.1	Mesure de Gibbs et fonction de partition	1
1.2	Fonctions de corrélation	2
1.3	Champ extérieur et réponse linéaire statique	2
1.4	Du réseau au continuum : le champ $\phi(x)$	3
1.5	Exemples physiques approfondis	4
1.6	Exercices corrigés	4
2	L'intégrale fonctionnelle gaussienne et les systèmes élastiques	7
2.1	Intégrale gaussienne en dimension n , proprement	7
2.2	La corde élastique thermique : calcul exact	8
2.3	Fonctionnelle génératrice et propagateur	8
2.4	Exemples physiques approfondis	9
2.5	Exercices corrigés	10
3	Point col, méthode variationnelle et diagrammes de Feynman	13
3.1	La méthode du point col (Laplace / phase stationnaire)	13
3.2	Méthode variationnelle : l'inégalité de Gibbs–Bogoliubov	14
3.3	Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman	14
3.4	Exemples physiques approfondis	16
3.5	Exercices corrigés	16
4	L'intégrale de chemin : quantique, temps imaginaire, instantons	19
4.1	Construction de l'intégrale de chemin	19
4.2	Fonction de partition quantique et conditions périodiques	20
4.3	Fonctions de corrélation et fréquences de Matsubara	21
4.4	Double puits et instantons : l'effet tunnel par le col	21
4.5	Exemples physiques approfondis	22
4.6	Exercices corrigés	23
5	États cohérents, bosons, fermions et variables de Grassmann	25
5.1	États cohérents bosoniques	25
5.2	Variables de Grassmann : mode d'emploi complet	26
5.3	Exemples physiques approfondis	27
5.4	Exercices corrigés	28
6	Réponse linéaire, fluctuation–dissipation et formule de Kubo	31
6.1	La formule de Kubo	31
6.2	Continuation analytique depuis Matsubara	32
6.3	Le théorème fluctuation–dissipation	32
6.4	Conductivité et formule de Kubo électrique	33
6.5	Exemples physiques approfondis	33

6.6	Exercices corrigés	34
7	Le groupe de renormalisation : une introduction opératoire	37
7.1	L'idée de Kadanoff : les blocs de spins	37
7.2	RG exact : la chaîne d'Ising décimée	38
7.3	Comptage de puissances et dimension critique	38
7.4	Exemples physiques approfondis	40
7.5	Exercices corrigés	41

Chapitre 1

Physique statistique d'équilibre : fonctions de corrélation et réponse

La partie C commence ici. Ce chapitre reprend le chapitre 2 de P. Simon en le développant : ensembles statistiques, fonctions de corrélation, réponse linéaire statique, et le passage au continu qui transforme la physique statistique en *théorie des champs*.

Prérequis / rappel

Probabilités élémentaires (espérance, variance, fonction génératrice) ; intégrale gaussienne (1.2) et moments de Wick (exercice 1.2) ; mesure de Gibbs (prop. 8.5).

1.1 Mesure de Gibbs et fonction de partition

Définition 1.1. Un système de configurations $\mathcal{C}$ (spins, positions, champ) et d'énergie $E[\mathcal{C}]$ en contact avec un thermostat à température $T = 1/k_B\beta$ est décrit par la *mesure de Gibbs canonique*

$$\mathbb{P}[\mathcal{C}] = \frac{e^{-\beta E[\mathcal{C}]}}{Z}, \quad Z(\beta) = \sum_{\mathcal{C}} e^{-\beta E[\mathcal{C}]}.$$

L'énergie libre est $F = -k_B T \log Z$; toute la thermodynamique s'en déduit par dérivation : $\langle E \rangle = -\partial_\beta \log Z$, $C_v = k_B \beta^2 \partial_\beta^2 \log Z = k_B \beta^2 (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)$.

Idée-clé

La dernière égalité — chaleur spécifique = variance de l'énergie — est le premier exemple du lien *réponse* $\leftrightarrow$ *fluctuations* qui structure tout le cours : dériver $\log Z$ par rapport à un paramètre *engendre les cumulants*. $\log Z$ est une fonction génératrice : la physique statistique est une théorie des fonctions génératrices, et la théorie des champs en sera le prolongement fonctionnel.

Exemple 1.2 (Le paramagnétique parfait, calcul complet). n spins indépendants $\sigma_i = \pm 1$ dans un champ h : $E = -h \sum_i \sigma_i$. La factorisation donne $Z = (2 \cosh \beta h)^n$, d'où l'aimantation

$$m = \frac{1}{n} \frac{\partial \log Z}{\partial (\beta h)} = \tanh(\beta h), \quad \chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} = \beta \quad (\text{loi de Curie } \chi \propto 1/T).$$

Et la variance : $\langle \sigma_i^2 \rangle - \langle \sigma_i \rangle^2 = 1 - \tanh^2(\beta h) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m}{\partial h}$: *réponse* = *fluctuation*, déjà.

1.2 Fonctions de corrélation

Définition 1.3. Pour un champ de spins $\{\sigma_i\}$ (ou un champ continu $\phi(x)$), les fonctions de corrélation à k points sont $\langle \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k} \rangle$. La *corrélation connexe* à deux points est

$$G_{ij}^{(c)} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle.$$

Dans une phase homogène, $G_{ij}^{(c)} = G(|r_i - r_j|)$, et l'on définit la *longueur de corrélation* ξ par la décroissance $G(r) \sim e^{-r/\xi}$ (r grand).

Exemple 1.4 (Chaîne d'Ising 1D : solution exacte par matrice de transfert). $E = -J \sum_{i=1}^n \sigma_i \sigma_{i+1}$ (périodique). L'astuce : écrire $Z = \text{Tr}(T^n)$ avec la matrice de transfert

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} \end{pmatrix}, \quad \text{valeurs propres } \lambda_{\pm} = 2 \cosh \beta J, \quad 2 \sinh \beta J.$$

Donc $Z = \lambda_+^n + \lambda_-^n$ et, pour $n \rightarrow \infty$, $F/n \rightarrow -k_B T \log(2 \cosh \beta J)$: analytique en $T > 0$, *pas de transition de phase en dimension 1*. La corrélation :

$$\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^r = (\tanh \beta J)^r = e^{-r/\xi}, \quad \xi = \frac{-1}{\log \tanh \beta J} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{e^{2\beta J}}{2}.$$

ξ diverge seulement à $T = 0$: le point critique de la chaîne est à température nulle. *Moralité technique* : la matrice de transfert transforme une somme sur configurations en algèbre linéaire — c'est un prototype d'intégrale de chemin discrète (le chapitre 4 fera le trajet inverse : intégrale de chemin $\rightarrow$ opérateur de transfert $e^{-\varepsilon H}$).

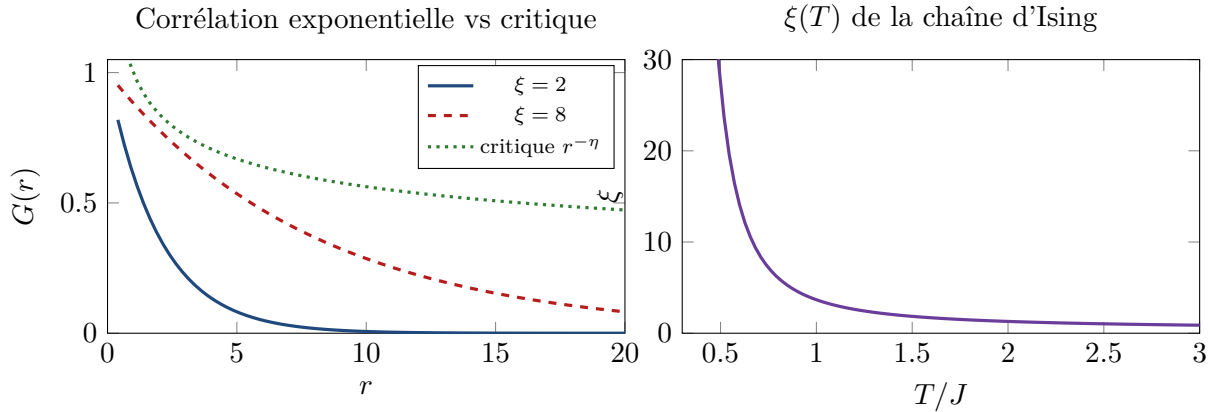


FIGURE 1.1 – Gauche : en phase ordinaire $G \sim e^{-r/\xi}$; au point critique la décroissance devient une loi de puissance $r^{-\eta}$ (perte d'échelle caractéristique). Droite : $\xi(T)$ exacte de la chaîne d'Ising — divergence à $T \rightarrow 0$.

1.3 Champ extérieur et réponse linéaire statique

Théorème 1.5 (Théorème fluctuation-réponse statique). *Couplons le système à un champ local : $E \rightarrow E - \sum_i h_i \sigma_i$. Alors*

$$\left. \frac{\partial \langle \sigma_i \rangle}{\partial h_j} \right|_{h=0} = \beta G_{ij}^{(c)}, \quad \text{d'où la susceptibilité} \quad \chi = \beta \sum_j G_{ij}^{(c)} = \beta \widehat{G^{(c)}}(q=0). \quad (1.1)$$

Démonstration. $\langle \sigma_i \rangle_h = \frac{1}{Z[h]} \sum_{\mathcal{C}} \sigma_i e^{-\beta E + \beta \sum_j h_j \sigma_j}$. Dérivons en h_j : le numérateur produit $\beta \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$, la dérivée du $\frac{1}{Z}$ produit $-\beta \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$: exactement $\beta G_{ij}^{(c)}$. La somme sur j (champ uniforme) donne la transformée de Fourier en $q = 0$. $\square$

Intuition

(1.1) explique la *divergence de la susceptibilité au point critique* : si $\xi \rightarrow \infty$, la somme $\sum_j G_{ij} \sim \int e^{-r/\xi} d^d r \sim \xi^d$ diverge — un système critique répond infiniment fort à une sollicitation infinitésimale, parce que ses fluctuations sont corrélées à toutes les échelles. L'opalescence critique (un fluide au point critique diffuse la lumière comme du lait) est la manifestation optique directe de (1.1).

1.4 Du réseau au continuum : le champ $\phi(x)$

Près d'un point critique, $\xi \gg a$ (maille du réseau) : les détails microscopiques deviennent invisibles et l'aimantation locale, moyennée sur des blocs mésoscopiques, définit un *champ continu* $\phi(x)$. L'énergie effective la plus générale compatible avec les symétries (invariance par translation, rotation, et $\phi \rightarrow -\phi$ pour Ising) est la fonctionnelle de *Ginzburg–Landau* :

$$\beta E[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{r_0}{2} \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 - h(x) \phi(x) \right], \quad (1.2)$$

et la fonction de partition devient une *intégrale fonctionnelle*

$$Z[h] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\beta E[\phi]} \quad (\text{somme sur toutes les configurations du champ}). \quad (1.3)$$

Remarque 1.6 (Que signifie $\mathcal{D}\phi$?). Rigoureusement : discrétiser l'espace en un réseau de maille a , poser $\mathcal{D}\phi = \prod_x d\phi(x)$ (produit fini), calculer, puis étudier la limite $a \rightarrow 0$ à observables fixées. La partie gaussienne ($u = 0$) admet une limite parfaitement définie (mesure gaussienne de covariance $(-\Delta + r_0)^{-1}$, notre chapitre 7 !); le terme ϕ^4 exige la renormalisation. Dans tout ce cours, $\mathcal{D}\phi$ signifie « limite du réseau », et chaque calcul gaussien est légitimé par le chapitre 5.

Exemple 1.7 (Corrélations du champ libre : retour de Yukawa). Pour $u = 0$, $Z[h]$ est gaussienne : en complétant le carré fonctionnel (l'idée-clé du chapitre 1, version opérateur),

$$\log \frac{Z[h]}{Z[0]} = \frac{1}{2} \iint h(x) G(x-y) h(y) dx dy, \quad G = (-\Delta + r_0)^{-1},$$

d'où $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle^{(c)} = G(x-y)$: la *corrélation du champ libre est la fonction de Green de Yukawa* (exercice 5.2, chapitre 7), de portée $\xi = r_0^{-1/2}$. En dimension 3 : $G(r) = \frac{e^{-r/\xi}}{4\pi r}$. Le point critique est $r_0 \rightarrow 0$: masse nulle, corrélation coulombienne $1/r$, perte d'échelle. Toute la partie B se recycle ici : les *EDP elliptiques deviennent des covariances*.

Application physique — Théorie de Landau et exposants classiques

En champ moyen (négliger les fluctuations : chercher le minimum de (1.2) pour ϕ constant), avec $r_0 \propto T - T_c$:

$$\phi_{\text{eq}} = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \pm \sqrt{-6r_0/u} \propto (T_c - T)^{1/2} & T < T_c \end{cases}$$

d'où $\beta_{\text{exp}} = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ ($\chi \sim |r_0|^{-1}$), $\delta = 3$, $\nu = \frac{1}{2}$. Ces exposants « classiques » sont *faux* en dimension $d < 4$ (Ising 2D exact d'Onsager : $\beta_{\text{exp}} = \frac{1}{8}$!) : les fluctuations les corrigent, et le critère de Ginzburg montre qu'elles dominent pour $d < 4$ — la dimension critique supérieure. Le calcul de ces corrections est précisément l'objet de la diagrammatique du chapitre 3.

Au notebook compagnon

TD 10 du notebook — Ising 1D : matrice de transfert exacte vs Monte-Carlo Metropolis (`optimizr.mcmc_sample` sur l'énergie de chaîne); corrélation $e^{-r/\xi}$ mesurée et $\xi(T)$ comparée à la formule exacte; Ising 2D : animation des configurations à $T < T_c$, $T \approx T_c$, $T > T_c$ (clusters critiques) et cumulant de Binder pour localiser $T_c \approx 2,269$.

1.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 1.8 (Le flambage d'une lame : la transition de phase sur votre bureau). Comprimez une règle plastique entre deux doigts avec une force F croissante : en dessous de la charge critique d'Euler $F_c = \pi^2 EI/L^2$, elle reste droite ; au-delà, elle saute à gauche *ou* à droite. C'est le modèle mécanique de brisure spontanée du chapitre 17 (exemple 17.17), et il reproduit *quantitativement* la théorie de Landau (1.2) : l'énergie élastique en fonction de la flèche x est

$$V(x) = \underbrace{a(F_c - F)}_{r(T) \leftrightarrow (T - T_c)} x^2 + b x^4,$$

le même polynôme que pour l'aimantation, avec le dictionnaire $F \leftrightarrow T$, $x \leftrightarrow m$. **Prédictions vérifiables à la maison** : flèche $x^* \propto (F - F_c)^{1/2}$ (exposant champ moyen $\beta = 1/2$) ; fréquence des petites oscillations autour de l'état droit $\omega \propto (F_c - F)^{1/2} \rightarrow 0$ à l'approche du seuil (mode mou, annonciateur universel des transitions) ; réponse à une poussée latérale h : $\chi = \partial x / \partial h \propto |F - F_c|^{-1}$ (divergence de la susceptibilité, $\gamma = 1$). Différence essentielle avec l'aimant : ici le « paramètre d'ordre » est macroscopique et sans fluctuations — le champ moyen est *exact* ; pour Ising 3D les fluctuations corrigent β à 0,326 (chap. 7).

Exemple 1.9 (Curie–Weiss résolu complètement : le champ moyen comme point col). Le modèle d'Ising « à portée infinie » (chaque spin interagit avec tous, J/N) est exactement soluble et justifie le champ moyen. Sa fonction de partition, après l'astuce de Hubbard–Stratonovich (une gaussienne du chapitre 1 lue à l'envers !) :

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{\frac{\beta J}{2N} (\sum_i s_i)^2} = \sqrt{\frac{N\beta J}{2\pi}} \int dm e^{-N\beta [\frac{Jm^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log(2 \cosh \beta J m)]} :$$

une intégrale de Laplace (chap. 3) que le point col domine quand $N \rightarrow \infty$. La condition de col $m = \tanh(\beta J m)$ est *l'équation auto-cohérente du champ moyen* — déduite, pas postulée. Analyse graphique : pour $\beta J < 1$ seule $m = 0$; pour $\beta J > 1$, deux solutions $\pm m^*$ apparaissent (brisure de $\mathbb{Z}_2$), avec $m^* \simeq \sqrt{3(1 - T/T_c)}$ près de $T_c = J/k_B$. **Où le champ moyen dit vrai/faux** : exact pour le supraconducteur BCS (portée effective des paires $\xi \sim 1 \mu\text{m} \gg$ maille : chaque paire « voit » $\sim 10^6$ voisins — portée quasi infinie réalisée) ; qualitatif pour Ising 3D ; *faux* pour Ising 1D (où il prédit une transition qui n'existe pas, exemple 1.4) : le critère de Ginzburg situe la frontière à $d = 4$, point de départ du chapitre 7. Le TD 10 compare $m(T)$ de Curie–Weiss à l'Ising 2D simulé.

1.6 Exercices corrigés

Exercice 10.1 (★) — Cumulants et génératrice

Montrer que $\log \langle e^{tX} \rangle = \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} c_k$ engendre les *cumulants* : $c_1 = \langle X \rangle$, $c_2 = \text{Var } X$, $c_3 = \langle (X - \langle X \rangle)^3 \rangle$. Que valent tous les c_k , $k \geq 3$, pour une gaussienne ?

Solution détaillée

Développer l'exponentielle et le logarithme : $\log(1 + m_1 t + \frac{m_2}{2} t^2 + \dots)$ et identifier : $c_1 = m_1$, $c_2 = m_2 - m_1^2$, $c_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$ — les formules moments $\rightarrow$ cumulants. Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $\log\langle e^{tX} \rangle = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$ exactement (compléter le carré, (1.2)) : *tous les cumulants d'ordre ≥ 3 sont nuls*. C'est la caractérisation de Wick : gaussien = que des paires. Les diagrammes *connexes* de la théorie des champs sont exactement les cumulants du champ. ✓

Exercice 10.2 (**) — Ising 1D en champ

Ajouter un champ h à la chaîne d'Ising et calculer Z par matrice de transfert. En déduire $m(h, T)$ et vérifier la loi de Curie modifiée $\chi(T) = \beta e^{2\beta J}$ à $h = 0$.

Solution détaillée

(1) $T = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{pmatrix}$, $\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \cosh \beta h \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}}$. (2) $m = \frac{1}{n\beta} \partial_h \log \lambda_+^n = \frac{e^{\beta J} \sinh \beta h}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}}}$. (3) $\chi = \partial_h m|_0 = \beta e^{2\beta J}$: la corrélation ferromagnétique *renforce* la réponse d'un facteur $e^{2\beta J} = \sum_r e^{-r/\xi}$ -ish — cohérent avec (1.1) et $\xi \approx \frac{e^{2\beta J}}{2}$. ✓

Exercice 10.3 (***) — Argument de Peierls (existence d'une transition en 2D)

Esquisser l'argument de Peierls : en dimension 2, à basse température, la probabilité qu'un spin donné soit renversé par rapport au bord est majorée par $\sum_{L \geq 4} L 3^L e^{-2\beta J L} < \frac{1}{2}$ pour β grand. Conclure à l'existence d'aimantation spontanée.

Solution détaillée

(1) Un spin — dans une mer de + est entouré d'un *contour* de longueur L (frontière des liens frustrés), de coût énergétique $2JL$. (2) Dénombrement : les contours de longueur L entourant l'origine sont au plus $L \cdot 3^L$ (départ sur $\leq L$ positions utiles, à chaque pas ≤ 3 directions). (3) Union bound : $\mathbb{P}[\sigma_0 = -1] \leq \sum_{L \geq 4} L 3^L e^{-2\beta J L}$, série géométrique convergente, $< \frac{1}{2}$ pour β assez grand : le spin reste majoritairement aligné avec le bord même à la limite thermodynamique — aimantation spontanée, donc transition de phase (contraste absolu avec la dimension 1, exemple 1.4, où les « contours » sont des paires de parois de coût fini $4J$ indépendant de leur écartement : l'entropie gagne toujours). L'énergie *vs* l'entropie des défauts topologiques : le critère universel d'existence d'ordre. ✓

Chapitre 2

L'intégrale fonctionnelle gaussienne et les systèmes élastiques

Ce chapitre installe l'outil central de tout le reste du cours : l'intégrale fonctionnelle gaussienne. On la construit proprement (discrétisation, diagonalisation de Fourier, limite), on calcule le propagateur, et on l'applique aux systèmes élastiques (cordes, membranes, interfaces) — le laboratoire où tout est exact.

Prérequis / rappel

Intégrale gaussienne multidimensionnelle (idée-clé du chapitre 1) ; séries et transformées de Fourier (chapitre 5) ; champ libre (exemple 1.7).

2.1 Intégrale gaussienne en dimension n , proprement

Théorème 2.1. Soit A une matrice réelle symétrique définie positive $n \times n$ et $j \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}x^\top Ax + j^\top x\right) d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left(\frac{1}{2}j^\top A^{-1}j\right). \quad (2.1)$$

Les moments s'obtiennent en dérivant par rapport à j :

$$\langle x_i x_j \rangle = (A^{-1})_{ij}, \quad \langle x_{i_1} \cdots x_{i_{2k}} \rangle = \sum_{\text{appariements } P} \prod_{(a,b) \in P} (A^{-1})_{i_a i_b} \quad (\text{théorème de Wick}). \quad (2.2)$$

Démonstration. (1) Compléter le carré : $x = A^{-1}j + y$; $-\frac{1}{2}x^\top Ax + j^\top x = -\frac{1}{2}y^\top Ay + \frac{1}{2}j^\top A^{-1}j$. (2) Diagonaliser : $A = O^\top \Lambda O$ orthogonalement ; le changement $z = Oy$ (jacobien 1) factorise en n gaussiennes unidimensionnelles (1.2) : $\prod_i \sqrt{2\pi/\lambda_i} = (2\pi)^{n/2}/\sqrt{\det A}$. (3) Wick : dériver (2.1) $2k$ fois en j puis poser $j = 0$. Chaque dérivée ∂_{j_i} appliquée à $e^{\frac{1}{2}j^\top A^{-1}j}$ doit être saturée par une autre pour survivre à $j = 0$: les termes non nuls sont exactement les appariements des $2k$ indices, chacun contribuant $(A^{-1})_{i_a i_b}$. Le nombre d'appariements de $2k$ objets est $(2k-1)!!$ — on retrouve l'exercice 1.2. $\square$

Idée-clé

Tout est déjà là : $A \rightarrow$ opérateur différentiel (par exemple $-\Delta + m^2$), $A^{-1} \rightarrow$ fonction de Green = *propagateur*, $j \rightarrow$ source extérieure, $\det A \rightarrow$ déterminant fonctionnel (= énergie du vide), Wick $\rightarrow$ diagrammes. La théorie des champs gaussienne est l'algèbre linéaire de la partie B.

2.2 La corde élastique thermique : calcul exact

Considérons une corde de longueur L , tension κ , fixée aux deux bouts, décrite par sa hauteur $\phi(x)$, en équilibre thermique :

$$\beta E[\phi] = \frac{\beta \kappa}{2} \int_0^L (\partial_x \phi)^2 dx, \quad Z = \int_{\phi(0)=\phi(L)=0} \mathcal{D}\phi e^{-\beta E[\phi]}.$$

Proposition 2.2 (Modes propres et équipartition). *En développant $\phi(x) = \sum_{k \geq 1} c_k \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k\pi x}{L}$, l'énergie devient diagonale : $\beta E = \frac{\beta \kappa}{2} \sum_k q_k^2 c_k^2$ avec $q_k = k\pi/L$, et*

$$\langle c_k c_{k'} \rangle = \frac{\delta_{kk'}}{\beta \kappa q_k^2} \quad (\text{équipartition : } \frac{\kappa q_k^2}{2} \langle c_k^2 \rangle = \frac{1}{2\beta} = \frac{k_B T}{2}),$$

d'où la fonction de corrélation exacte (série calculable)

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \frac{1}{\beta \kappa} G_L(x, y), \quad G_L(x, y) = \frac{x(L-y)}{L} \quad (x \leq y),$$

la fonction de Green de $-\partial_x^2$ sur $[0, L]$ avec Dirichlet.

Démonstration. **(1)** La base sin diagonalise $-\partial_x^2$ avec Dirichlet ; Parseval transforme $\int (\partial_x \phi)^2$ en $\sum q_k^2 c_k^2$. **(2)** L'intégrale fonctionnelle se factorise en gaussiennes indépendantes sur chaque c_k : théorème 2.1 en dimension 1 par mode, d'où la covariance $1/(\beta \kappa q_k^2)$. **(3)** La série $\frac{2}{L} \sum_k \frac{\sin q_k x \sin q_k y}{q_k^2}$ est le développement en modes propres du noyau de Green ; on vérifie que $g(x) = \frac{x(L-y)}{L}$ ($x \leq y$) satisfait $-g'' = \delta_y$ (formule des sauts (3.4) : pente $\frac{L-y}{L}$ puis $-\frac{y}{L}$, saut de dérivée -1 en y ✓) et les conditions de bord. $\square$

Application physique — Rugosité d'une interface

Le déplacement quadratique : $\langle \phi(x)^2 \rangle = \frac{x(L-x)}{\beta \kappa L} \leq \frac{L}{4\beta \kappa}$: la corde thermique est rugueuse, ses fluctuations croissent comme $\sqrt{L}$. En dimension d d'interface, le même calcul donne $\langle \phi^2 \rangle \sim \int^{q_{\max}} \frac{d^d q}{q^2}$: divergent infrarouge pour $d \leq 2$ (interfaces rugueuses : cordes, membranes molles), fini pour $d > 2$ (interfaces lisses). Ce *comptage infrarouge* est le théorème de Mermin–Wagner en germe : pas d'ordre continu brisé en $d \leq 2$ à température finie.

2.3 Fonctionnelle génératrice et propagateur

Définition 2.3 (Fonctionnelle génératrice).

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi] + \int j\phi), \quad W[j] = \log Z[j], \quad (2.3)$$

avec $S[\phi] = \frac{1}{2} \int \phi \hat{A} \phi + S_{\text{int}}[\phi]$. Les dérivées fonctionnelles engendrent les corrélations :

$$\left. \frac{\delta^k W}{\delta j(x_1) \cdots \delta j(x_k)} \right|_{j=0} = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_k) \rangle^{(c)} \quad (\text{corrélations connexes}).$$

Remarque 2.4 (Dérivée fonctionnelle : mode d'emploi). $\frac{\delta}{\delta j(x)}$ est définie par $\frac{\delta j(y)}{\delta j(x)} = \delta(x-y)$ + règles de Leibniz et de composition : c'est la version continue de $\partial/\partial j_i$ avec $i \rightarrow x$, et la masse de Dirac du chapitre 3 y joue le rôle du symbole de Kronecker. Exemple : $\frac{\delta}{\delta j(x)} \exp \int j\phi = \phi(x) \exp \int j\phi$. Toute la combinatoire du théorème 2.1 se transcrit alors telle quelle.

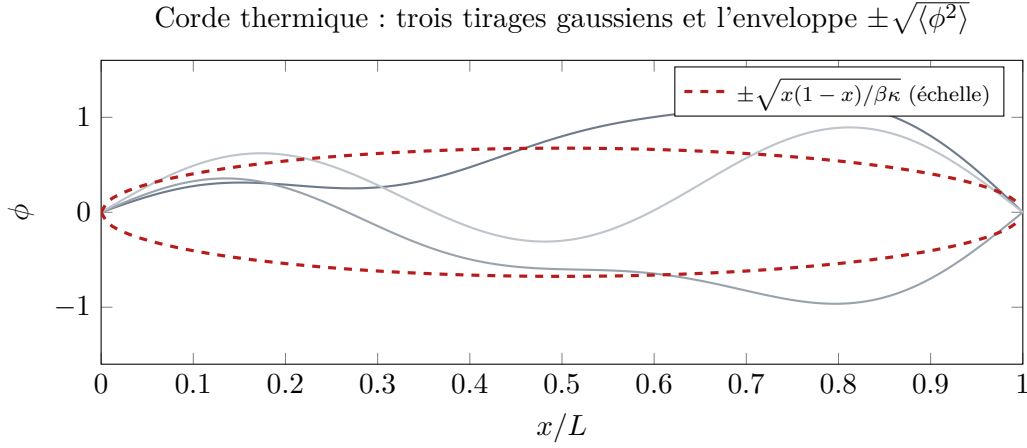


FIGURE 2.1 – Tirages du champ gaussien de la corde et enveloppe théorique $\sqrt{\langle\phi(x)^2\rangle}$: le profil des fluctuations suit la fonction de Green Dirichlet. Le TD 11 reproduit cette figure par échantillonnage spectral exact.

Théorème 2.5 (Théorie libre). *Pour $S_{\text{int}} = 0$ et $\hat{A} = -\Delta + m^2$:*

$$W[j] = W[0] + \frac{1}{2} \iint j(x) G(x-y) j(y), \quad \hat{G}(q) = \frac{1}{q^2 + m^2},$$

et Wick (2.2) donne toutes les corrélations : $\langle\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\rangle = G_{12}G_{34} + G_{13}G_{24} + G_{14}G_{23}$.

C'est l'exemple 1.7 réécrit dans le langage génératrice — désormais notre langage permanent.

Application finance / signal

La régression ridge/krigeage est *exactement* ce formalisme : un prior gaussien de covariance G sur une fonction inconnue, des observations linéaires bruitées, et le posterior s'obtient en complétant le carré (2.1) — les processus gaussiens du machine learning *sont* des théories de champs libres, le noyau RBF jouant le rôle du propagateur. Le TD 11 échantillonne le champ de covariance $(q^2 + m^2)^{-1}$ et fait varier la masse m pour visualiser la longueur de corrélation.

Au notebook compagnon

TD 11 du notebook — échantillonnage spectral exact du champ gaussien 1D et 2D : modes de Fourier indépendants de variance $(q^2 + m^2)^{-1}$, animation de la texture du champ quand $m \rightarrow 0$ (divergence de ξ , apparition des grandes structures) ; vérification de Wick à 4 points ; enveloppe de la corde (fig. 2.1) reproduite ; lien processus gaussiens / krigeage.

2.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 2.6 (Le facteur de Debye–Waller : pourquoi la diffraction survit à l'agitation thermique). La diffraction de von Laue (exemple 5.11) suppose les atomes fixes ; en réalité chacun vibre, $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_n^0 + \mathbf{u}_n$, où $\mathbf{u}_n$ est un *champ gaussien* (les phonons à l'équilibre thermique : modes normaux indépendants, chacun un oscillateur gaussien). L'amplitude de Bragg au vecteur $\mathbf{K}$ contient $\langle e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}} \rangle$ — exactement la fonction génératrice gaussienne (2.3) :

$$\langle e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle(\mathbf{K}\cdot\mathbf{u})^2\rangle} \equiv e^{-W}, \quad I_{\text{Bragg}} = I_0 e^{-2W}, \quad W = \frac{1}{6} K^2 \langle u^2 \rangle \text{ (cubique)}.$$

Les pics de Bragg ne s'élargissent pas : ils *s'atténuent*, et le poids perdu part en fond diffus (diffusion inélastique par les phonons). **Chiffres** : pour l'aluminium à 300 K, $\sqrt{\langle u^2 \rangle} \approx 0,1 \text{ \AA}$, et pour une réflexion typique $2W \approx 0,3$: l'intensité tient à 74% — c'est pourquoi la cristallographie fonctionne à température ambiante. En abaissant T , $e^{-2W} \rightarrow \text{cste} > 0$ (vibrations de point zéro) : même à $T = 0$ le cristal quantique vibre. **Bonus dimensionnel** : en $d = 2$, $\langle u^2 \rangle = \int \frac{d^2 k}{k^2}$ diverge logarithmiquement (infrarouge) : pas d'ordre cristallin vrai en 2D (Mermin–Wagner, les Goldstone du chapitre 17 le détruisent) — le graphène n'existe que stabilisé par ses ondulations hors plan et la croissance $\propto \log$ reste observable dans ses pics de diffraction élargis.

Exemple 2.7 (Ondes capillaires : la rugosité d'une interface calculée par intégrale gaussienne). Une interface eau–air de hauteur $h(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$) coûte l'énergie $E[h] = \int d^2 x [\frac{\gamma}{2} |\nabla h|^2 + \frac{\rho g}{2} h^2]$ (tension de surface $\gamma = 72 \text{ mN/m}$ + gravité) : une action gaussienne, notre champ libre avec la « masse » $m^2 = \rho g / \gamma = 1/\ell_c^2$, où $\ell_c = \sqrt{\gamma / \rho g} = 2,7 \text{ mm}$ est la longueur capillaire. Par équipartition mode à mode $(\frac{1}{2}(\gamma k^2 + \rho g) \langle |h_k|^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T)$:

$$\langle h^2 \rangle = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_B T}{\gamma k^2 + \rho g} = \frac{k_B T}{4\pi\gamma} \log\left(1 + \frac{k_{\max}^2 \gamma}{\rho g}\right) :$$

avec $k_{\max} \sim 2\pi/(0,3 \text{ nm})$ (taille moléculaire), $\sqrt{\langle h^2 \rangle} \approx 3,7 \text{ \AA}$: l'océan, à l'échelle moléculaire, est rugueux de quelques ångströms seulement, et cette rugosité — prédite par la même covariance gaussienne que celle des TD — est mesurée par réflectivité de rayons X rasants (accord à quelques %). Le cutoff gravitationnel ℓ_c joue le rôle de la masse : sans lui ($g \rightarrow 0$, microgravité), les fluctuations divergent $\log$ — encore Mermin–Wagner. Même formalisme, troisième incarnation : les fluctuations de hauteur des membranes biologiques ($\kappa(\Delta h)^2$: rigidité de courbure, spectre en $1/k^4$) qui font « scintiller » les globules rouges au microscope.

2.5 Exercices corrigés

Exercice 11.1 (★) — Wick à 6 points

Combien de termes dans $\langle \phi_1 \cdots \phi_6 \rangle$ libre ? Écrire trois d'entre eux.

Solution détaillée

$(6-1)!! = 15$ appariements. Par exemple $G_{12}G_{34}G_{56}$, $G_{13}G_{25}G_{46}$, $G_{16}G_{24}G_{35}$. La croissance $(2k-1)!! \sim \sqrt{2} (2k/e)^k$ des termes de Wick est la raison combinatoire de la divergence des séries de perturbation (séries asymptotiques, chapitre 3). ✓

Exercice 11.2 (★★) — Déterminant de la corde et fonction zêta

Calculer formellement $\det(-\partial_x^2)$ sur $[0, L]$ (Dirichlet) par régularisation zêta : $\log \det = -\zeta'_A(0)$ avec $\zeta_A(s) = \sum_k \lambda_k^{-s}$.

Solution détaillée

(1) $\lambda_k = (k\pi/L)^2$: $\zeta_A(s) = \sum_{k \geq 1} (k\pi/L)^{-2s} = (L/\pi)^{2s} \zeta(2s)$ (zêta de Riemann). (2) $\zeta'_A(0) = 2 \log(L/\pi) \zeta(0) + 2\zeta'(0) = -\log(L/\pi) - \log(2\pi) = -\log(2L)$, avec $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi$. (3) $\det(-\partial_x^2) = e^{-\zeta'_A(0)} = 2L$: fini ! La régularisation zêta assigne une valeur finie au produit infini $\prod \lambda_k$ en soustrayant implicitement la divergence — même esprit que la partie finie de Hadamard (exercice 3.3). Ce déterminant gouverne le préfacteur à une boucle de toutes les fonctions de partition (chapitre 4 : formule de Gelfand–Yaglom). ✓

Exercice 11.3 (* — Mermin–Wagner quantitatif**

Pour le modèle XY en dimension d ($S = \frac{\beta\kappa}{2} \int |\nabla\theta|^2$, ondes de spin gaussiennes), calculer $\langle\theta(x)^2\rangle \sim \frac{1}{\beta\kappa} \int_{1/L}^{1/a} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2}$ et montrer : divergence logarithmique en L pour $d = 2$; en déduire la décroissance algébrique $\langle e^{i[\theta(x)-\theta(0)]} \rangle \sim |x|^{-1/(2\pi\beta\kappa)}$ (quasi-ordre de Kosterlitz–Thouless).

Solution détaillée

(1) $d = 2$: $\int \frac{q dq}{2\pi q^2} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{L}{a}$: les fluctuations de phase divergent avec la taille — pas d'aimantation spontanée (Mermin–Wagner) ; $d = 3$: intégrale finie, ordre possible. (2) Champ gaussien : $\langle e^{i\Delta\theta} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle\Delta\theta^2\rangle}$ (génératrice gaussienne, (2.1) avec source imaginaire). (3) $\langle[\theta(x) - \theta(0)]^2\rangle = 2[G(0) - G(x)] = \frac{1}{\pi\beta\kappa} \log \frac{|x|}{a}$ (fonction de Green log du chapitre 7, $N = 2$!) : d'où $\langle e^{i\Delta\theta} \rangle = (a/|x|)^{1/(2\pi\beta\kappa)}$ — ni ordre vrai (pas de constante), ni désordre (pas d'exponentielle) : *quasi-ordre* algébrique, détruit à plus haute température par le déliement des vortex (transition BKT). Le $E_2 = \frac{1}{2\pi} \log |x|$ du théorème 7.1 pilote donc directement la physique des films superfluides. ✓

Chapitre 3

Point col, méthode variationnelle et diagrammes de Feynman

Comment calculer une intégrale fonctionnelle *non* gaussienne ? Trois stratégies, du chapitre 3 de P. Simon, ici développées avec tous les calculs : le point col (exact quand un grand paramètre concentre la mesure), la méthode variationnelle (la meilleure gaussienne), et la théorie des perturbations organisée par les diagrammes de Feynman.

Prérequis / rappel

Théorème 2.1 (gaussienne + Wick) ; fonctionnelle génératrice (2.3) ; notion de cumulant (exercice 10.1).

3.1 La méthode du point col (Laplace / phase stationnaire)

Théorème 3.1 (Méthode de Laplace). *Soit $f \in C^2([a, b])$ atteignant son minimum en un unique point intérieur x_0 , avec $f''(x_0) > 0$. Alors, pour $\lambda \rightarrow +\infty$:*

$$\int_a^b e^{-\lambda f(x)} g(x) dx = e^{-\lambda f(x_0)} g(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f''(x_0)}} (1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1})). \quad (3.1)$$

Démonstration. **(1) Localisation** : hors d'un voisinage $|x - x_0| > \delta$, $f(x) \geq f(x_0) + c_\delta$; la contribution y est $\mathcal{O}(e^{-\lambda(f(x_0)+c_\delta)})$, exponentiellement négligeable. **(2) Quadratisation** : près de x_0 , $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3)$; le changement d'échelle $u = \sqrt{\lambda}(x - x_0)$ donne

$$e^{-\lambda f(x_0)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int e^{-\frac{1}{2}f''(x_0)u^2} \left[g(x_0) + \mathcal{O}\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \right] \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{u^3}{\sqrt{\lambda}}\right) \right] du.$$

(3) La gaussienne (1.2) donne le terme principal ; les corrections sont impaires (nulles) ou en $1/\lambda$: développement asymptotique systématique en puissances de $1/\lambda$, dont les coefficients s'organisent en... diagrammes (section 3). $\square$

Exemple 3.2 (Stirling en trois lignes). $n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n^{n+1} \int_0^\infty e^{-n(s - \log s)} ds$ (poser $t = ns$) : col en $s_0 = 1$, $f''(1) = 1$, d'où $n! \sim n^{n+1} e^{-n} \sqrt{2\pi/n} = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$. Le grand paramètre concentre *toute* l'intégrale autour du col — le même mécanisme qui rend la thermodynamique déterministe (exercice 1.4 : concentration de la mesure).

Idée-clé — Le col fonctionnel

Pour $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]/g}$ avec $g \rightarrow 0$ (couplage faible, $\hbar \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty \dots$) : le col est la solution de l'équation du mouvement

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_c} = 0 \quad (\text{équation d'Euler-Lagrange : une EDP de la partie B!}),$$

et

$$Z \simeq e^{-S[\phi_c]/g} [\det S''[\phi_c]]^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(g)).$$

Hierarchie de lecture : l'ordre dominant est la *physique classique* (ϕ_c) ; le déterminant est la contribution des *fluctuations gaussiennes* (« une boucle ») ; les ordres suivants sont les diagrammes. Le TD 12 illustre la précision de (3.1) et la recherche de col par `optimizr.differential_evolution`.

3.2 Méthode variationnelle : l'inégalité de Gibbs–Bogoliubov

Théorème 3.3 (Gibbs–Bogoliubov–Feynman). *Pour toute action d'essai S_0 (gaussienne en pratique) :*

$$F \leq F_0 + \frac{1}{\beta} \langle S - S_0 \rangle_{S_0}, \quad (3.2)$$

où $F = -\frac{1}{\beta} \log Z$, $F_0 = -\frac{1}{\beta} \log Z_0$ et $\langle \cdot \rangle_{S_0}$ la moyenne gaussienne d'essai. On minimise le membre de droite sur les paramètres de S_0 .

Démonstration. (1) $Z = Z_0 \langle e^{-(S-S_0)} \rangle_{S_0}$ (multiplier-diviser). (2) Convexité de l'exponentielle + inégalité de Jensen : $\langle e^{-X} \rangle \geq e^{-\langle X \rangle}$. (3) Prendre $-\frac{1}{\beta} \log$: l'inégalité se renverse et donne (3.2). $\square$

Exemple 3.4 (Oscillateur anharmonique variationnel). $S = \int dx [\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{r_0}{2}\phi^2 + \frac{u}{4!}\phi^4]$; essai gaussien de masse variationnelle r : $S_0 = \frac{1}{2} \int [(\nabla\phi)^2 + r\phi^2]$. Wick donne $\langle \phi^4 \rangle_0 = 3\langle \phi^2 \rangle_0^2$ et le minimum de (3.2) conduit à l'équation *auto-cohérente*

$$r = r_0 + \frac{u}{2} \langle \phi^2 \rangle_0(r), \quad \langle \phi^2 \rangle_0(r) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + r} :$$

la masse effective est décalée par les fluctuations — c'est l'approximation de *champ moyen auto-cohérent* (Hartree). Elle prédit correctement l'existence de la transition mais des exposants classiques : la criticité exige de resommer plus finement (renormalisation).

3.3 Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman

Développons $Z[j]$ en puissances du couplage u (théorie ϕ^4) :

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(-\frac{u}{4!} \int \phi^4 \right)^n e^{\int j\phi}.$$

Chaque terme est une somme de moments *gaussiens*, calculables par Wick (2.2) : chaque appariement se code par un *diagramme*.

Définition 3.5 (Règles de Feynman de ϕ^4 (espace des positions)). — une **ligne** entre x et

y = propagateur $G(x-y)$;

— un **vertex** = $-u \int d^d z$ où quatre lignes se rencontrent ;

— diviser par le **facteur de symétrie** du diagramme (automorphismes) ;

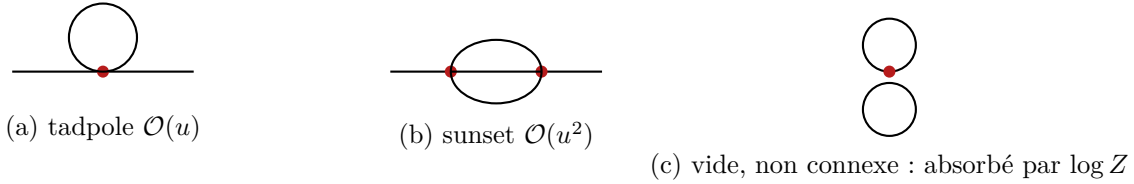


FIGURE 3.1 – Diagrammes de ϕ^4 pour la fonction à deux points : le tadpole (a) décale la masse (c'est le terme de Hartree de l'exemple 3.4) ; le sunset (b) apporte la première correction non triviale ; les diagrammes du vide (c) disparaissent des corrélations connexes.

— $\log Z$ (les cumulants !) ne reçoit que les diagrammes **connexes**.

Théorème 3.6 (Théorème des graphes connexes). $W[j] = \log Z[j]$ est la somme des seuls diagrammes connexes.

Démonstration (argument combinatoire complet). (1) Tout diagramme D se décompose uniquement en composantes connexes C_i avec multiplicités n_i : $D = \prod C_i^{n_i}$. (2) La valeur de D factorise, et son facteur de symétrie contient $\prod n_i!$ (permutation des copies identiques) en plus des symétries internes de chaque C_i . (3) Donc $Z = \sum_D \text{val}(D) = \prod_{C \text{ connexe}} \sum_{n \geq 0} \frac{\text{val}(C)^n}{n!} = \exp\left(\sum_C \text{val}(C)\right)$: en prenant le logarithme, $W = \sum_{C \text{ connexe}} \text{val}(C)$. C'est *exactement* la relation moments-cumulants de l'exercice 10.1, dessinée. $\square$

Exemple 3.7 (Correction de masse à l'ordre u , calcul complet). La fonction à deux points à l'ordre 1 :

$$G^{(2)}(x, y) = G(x - y) - \frac{u}{4!} \int dz \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z)^4 \rangle_0^{\text{connexe}} + \mathcal{O}(u^2).$$

Wick : appairer $\phi(x)$ avec un $\phi(z)$ (4 choix), $\phi(y)$ avec un autre (3 choix), les deux restants ensemble (1 choix) : 12 appariements connexes, d'où

$$G^{(2)} = G - \frac{u}{2} \int dz G(x - z) G(0) G(z - y) + \mathcal{O}(u^2),$$

soit en Fourier $\widehat{G^{(2)}}(q) = \frac{1}{q^2 + r_0} - \frac{u}{2} \frac{G(0)}{(q^2 + r_0)^2} = \frac{1}{q^2 + r_0 + \frac{u}{2} G(0)} + \mathcal{O}(u^2)$: la masse est décalée de $\frac{u}{2} G(0)$, avec $G(0) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + r_0}$ — divergent ultraviolet pour $d \geq 2$! La température critique (où la masse renormalisée s'annule) dépend du cut-off : c'est une quantité *non universelle* ; les exposants critiques, eux, sont universels. Séparer l'universel du contingent est le programme du groupe de renormalisation.

Attention — Les séries de perturbation divergent

Le nombre de diagrammes à l'ordre n croît comme $n!$ (exercice 11.1) : la série en u a un rayon de convergence *nul*. Argument de Dyson : si la série convergerait pour $u < 0$ (potentiel instable), la théorie serait définie là où elle ne l'est pas — absurde. Ces séries sont *asymptotiques* : tronquées à l'ordre optimal $n^* \sim 1/u$, elles atteignent une précision $e^{-1/u}$; les resommer (Borel, Padé) est un art. Le terme manquant $e^{-c/u}$ est un effet *non perturbatif* : l'instanton du chapitre 4.

Au notebook compagnon

TD 12 du notebook — précision de Laplace/Stirling en fonction de n ; intégrale ϕ^4 à zéro dimension : $Z(u) = \int e^{-\phi^2/2 - u\phi^4/4!} d\phi$ calculée exactement, comparée à la série des diagrammes tronquée à chaque ordre (divergence *animée* de la série, ordre optimal $n^*(u)$),

au variationnel de Bogoliubov (3.2) minimisé par `optimizr.differential_evolution`, et à la resommation de Borel–Padé.

3.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 3.8 (Le rapport R : compter les couleurs avec un diagramme). Le processus $e^+e^- \rightarrow$ hadrons, au premier ordre, passe par un seul diagramme : annihilation en photon virtuel puis création d’une paire $q\bar{q}$. Le même diagramme avec $\mu^+\mu^-$ en état final ne diffère que par la charge et la multiplicité : dans le rapport, tout se simplifie — espace des phases, couplage, propagateur — sauf

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_c \sum_{q \text{ accessibles}} e_q^2 :$$

chaque saveur de quark accessible ($2m_q < \sqrt{s}$) contribue e_q^2 , le tout multiplié par le nombre de couleurs N_c . **Prédictions en escalier** : sous le charme (u, d, s) : $R = 3(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}) = 2$; au-dessus du seuil $c\bar{c}$ ($\sqrt{s} > 3,7$ GeV) : $R = \frac{10}{3}$; au-dessus de $b\bar{b}$ ($> 10,6$ GeV) : $R = \frac{11}{3}$. Les marches mesurées (SPEAR, PETRA, LEP) tombent sur ces plateaux — avec le facteur 3 : c’est la preuve expérimentale la plus directe que chaque quark existe en trois couleurs. Les corrections QCD décalent chaque plateau de $(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots)$: mesurer R à 3% près au pôle du Z , c’est mesurer α_s — la première série de diagrammes de ce chapitre que l’expérience lit directement. Et les « marches » aux seuils sont les $\delta(s - 4m_q^2)$ de l’exemple 3.20 : Sokhotski–Plemelj au collisionneur.

Exemple 3.9 (La série perturbative de QED diverge — et c’est une bonne nouvelle). L’argument de Dyson (1952), transposé de notre intégrale ϕ^4 en dimension 0 (section précédente) : si la série de QED en puissances de $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ convergerait avec un rayon $\rho > 0$, elle convergerait aussi pour $\alpha < 0$ — un monde où les charges de même signe s’attirent. Dans ce monde, le vide est instable : créer N paires et séparer les $+$ des $-$ libère une énergie $\propto N^2$ qui dépasse le coût $2Nmc^2$ dès que N est grand : aucune quantité physique n’y est analytique. Donc $\rho = 0$: la série diverge pour tout α , avec $c_n \sim n!$ comme dans notre modèle jouet. **Pourquoi ça marche quand même** : série asymptotique, erreur minimale $\sim e^{-1/\alpha}$ atteinte vers $n^* \sim 1/\alpha \approx 137$ ordres — hors d’atteinte : les 5 boucles calculées du moment magnétique de l’électron donnent déjà $a_e^{\text{th}} = 0,001\,159\,652\,181\,6(2)$ contre $a_e^{\text{exp}} = 0,001\,159\,652\,180\,59(13)$: douze chiffres — la prédiction la plus précise de toute la science, obtenue d’une série *divergente* tronquée à l’ordre 5. **Le terme manquant est physique** : l’ambiguïté $e^{-c/\alpha}$ de la resommation de Borel correspond à des effets non perturbatifs réels — production de paires de Schwinger dans un champ fort E ($P \propto e^{-\pi m^2 c^3 / e E \hbar}$, seuil $E_c \approx 1,3 \times 10^{18}$ V/m visé par les lasers extrêmes), et en QCD les instantons du chapitre 4 : ce que la série ne voit pas, le point col non trivial le calcule.

3.5 Exercices corrigés

Exercice 12.1 (★) — Facteurs de symétrie

Vérifier le facteur $\frac{1}{2}$ du tadpole de l’exemple 3.7 et calculer celui du diagramme « huit » (deux boucles attachées au même vertex, contribution au vide).

Solution détaillée

Tadpole : 12 appariements sur $4! = 24$ du préfacteur $\frac{1}{4!} \Rightarrow \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. ✓ Huit : apparier les 4 pattes du vertex entre elles : 3 façons, donc $\frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$: facteur de symétrie 8 (deux symétries de chaque boucle $\times$ échange des boucles). ✓

Exercice 12.2 (★★) — ϕ^4 à zéro dimension

Pour $Z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\phi^2/2 - \frac{u}{4!}\phi^4} d\phi$, calculer les coefficients de la série $Z = \sum_n c_n u^n$ par Wick et montrer $c_n = \frac{(-1)^n (4n-1)!!}{n! (4!)^n}$; vérifier la croissance factorielle.

Solution détaillée

(1) $c_n = \frac{(-1)^n}{n! (4!)^n} \langle \phi^{4n} \rangle_0$ et $\langle \phi^{4n} \rangle_0 = (4n-1)!!$ (exercice 1.2, $\sigma = 1$). (2) Stirling : $(4n-1)!! \sim 2^{2n} \sqrt{2} (2n/e)^{2n}$, donc $|c_n| \sim \frac{(2/3)^n n!}{\pi\text{-ish}}$ — croissance factorielle, rayon de convergence nul, conformément à l'argument de Dyson (le minimum du terme $|c_n u^n|$ est atteint vers $n^* \approx \frac{3}{2u}$). ✓

Exercice 12.3 (★★★) — Équation du col avec contrainte : le gaz de Coulomb

Par la méthode du col, estimer pour $N \rightarrow \infty$ l'intégrale $Z_N = \int_{[0,1]^N} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{2\beta} d^N x$ (répulsion logarithmique : valeurs propres de matrices aléatoires). Montrer que la densité d'équilibre minimise $\mathcal{E}[\rho] = -\beta \iint \log|x-y| \rho(x)\rho(y) dx dy$ sous $\int \rho = 1$ et donner l'équation d'Euler-Lagrange.

Solution détaillée

(1) Écrire $Z_N = \int e^{2\beta \sum_{i<j} \log|x_i - x_j|}$; en introduisant la densité empirique $\rho_N = \frac{1}{N} \sum \delta_{x_i}$ (une distribution!), l'exposant vaut $N^2 \beta \iint \log|x-y| \rho_N(x)\rho_N(y) + \mathcal{O}(N)$. (2) Le grand paramètre N^2 concentre l'intégrale sur le minimiseur de $\mathcal{E}$ (principe de grandes déviations, col fonctionnel). (3) Euler-Lagrange avec multiplicateur : $-2\beta \int \log|x-y| \rho(y) dy = \mu$ sur le support : le potentiel logarithmique est constant — équilibre électrostatique 2D! Dériver : $\text{vp} \int \frac{\rho(y)}{x-y} dy = 0$ — une équation intégrale singulière à noyau $\text{vp} \frac{1}{x}$ (chapitre 3!). Sur $\mathbb{R}$ avec confinement quadratique, sa solution est le *demi-cercle de Wigner*. La boucle est bouclée : distributions $\rightarrow$ col $\rightarrow$ matrices aléatoires. ✓

Chapitre 4

L'intégrale de chemin : quantique, temps imaginaire, instantons

Voici le chapitre 4 de P. Simon, entièrement développé : la construction de Feynman de la mécanique quantique comme somme sur les trajectoires, sa version euclidienne (temps imaginaire) qui la relie à la physique statistique, les fréquences de Matsubara, et les effets non perturbatifs (instantons, effet tunnel).

Prérequis / rappel

Propagateurs de la chaleur et de Schrödinger (chapitres 8–9, rotation de Wick de l'exercice 9.3) ; point col (théorème 3.1) ; formule de Trotter admise : $e^{-\varepsilon(A+B)} = e^{-\varepsilon A}e^{-\varepsilon B} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ pour opérateurs raisonnables.

4.1 Construction de l'intégrale de chemin

Théorème 4.1 (Formule de Feynman–Kac (version euclidienne)). *Pour $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)$ (potentiel raisonnable), le noyau de $e^{-\tau H/\hbar}$ s'écrit*

$$\langle x_f | e^{-\tau H/\hbar} | x_i \rangle = \int_{x(0)=x_i}^{x(\tau)=x_f} \mathcal{D}x \exp\left(-\frac{S_E[x]}{\hbar}\right), \quad S_E[x] = \int_0^\tau \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)\right] ds, \quad (4.1)$$

où $\mathcal{D}x$ est la limite des discrétisations

$$\int \prod_{k=1}^{n-1} dx_k \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)^{n/2}, \quad \varepsilon = \tau/n.$$

Démonstration. (1) *Découpage* : $e^{-\tau H/\hbar} = (e^{-\varepsilon H/\hbar})^n$; insérer $n - 1$ résolutions de l'identité $\int |x_k\rangle\langle x_k| dx_k$: le noyau devient un produit de noyaux élémentaires intégré sur les points intermédiaires. (2) *Trotter* : $e^{-\varepsilon H/\hbar} \approx e^{-\varepsilon V/2\hbar} e^{\varepsilon \hbar \partial_x^2/2m} e^{-\varepsilon V/2\hbar}$; le noyau cinétique est celui de la chaleur (8.1) avec $\kappa = \frac{\hbar}{2m}$:

$$\langle x_{k+1} | e^{-\varepsilon H/\hbar} | x_k \rangle = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{V(x_k) + V(x_{k+1})}{2}\right]\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

(3) *Recomposition* : le produit des exponentielles reconstitue la somme de Riemann de S_E ; l'erreur cumulée $n \cdot \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow 0$. La limite existe (pour V borné inférieurement continu) et définit le membre de droite : c'est une intégrale contre la mesure de Wiener pondérée $e^{-\int V/\hbar}$ — parfaitement rigoureuse, contrairement à sa sœur en temps réel qui reste une écriture symbolique (oscillante, définie par rotation de Wick). $\square$

Intuition

Lecture physique de (4.1) : la particule quantique explore tous les chemins, chacun pesant $e^{-S_E/\hbar}$. Quand $\hbar \rightarrow 0$, le col (chapitre 3!) sélectionne le chemin d'action minimale — la trajectoire classique : la mécanique classique est la méthode de Laplace appliquée à la mécanique quantique. Les fluctuations autour du col donnent les corrections semi-classiques (WKB, exercice 6.3).

4.2 Fonction de partition quantique et conditions périodiques

Corollaire 4.2 (La physique statistique est une intégrale de chemin périodique).

$$Z = \text{Tr } e^{-\beta H} = \oint_{x(0)=x(\hbar\beta)} \mathcal{D}x e^{-S_E[x]/\hbar} : \quad (4.2)$$

la fonction de partition à température T est la somme sur les chemins périodiques en temps imaginaire, de période $\hbar\beta = \hbar/k_B T$.

Démonstration. $\text{Tr} = \int dx \langle x | e^{-\beta H} | x \rangle$: prendre (4.1) avec $\tau = \hbar\beta$, $x_i = x_f = x$, et intégrer sur x : la somme sur chemins fermés. $\square$

Idée-clé

(4.2) est le dictionnaire quantique–statistique :

Quantique (temps réel)	Statistique (euclidien)
évolution $e^{-iHt/\hbar}$	poids $e^{-\beta H}$
action $iS/\hbar$ oscillante	action $-S_E/\hbar$ amortie
température T	période imaginaire $\hbar/k_B T$
$\hbar \rightarrow 0$: classique	$T \rightarrow \infty$: classique
état fondamental	limite $\beta \rightarrow \infty$ (exercice 9.3)
théorie des champs $d+1$	physique statistique en $d+1$ dim.

Une théorie quantique en dimension d d'espace est une physique statistique classique en dimension $d+1$, dont l'une des directions est compactifiée à la circonférence $\hbar\beta$. À haute température, le cercle rétrécit : la dimension quantique disparaît (réduction dimensionnelle), le système devient classique.

Exemple 4.3 (Oscillateur harmonique : fonction de partition exacte). Modes de Fourier périodiques (*fréquences de Matsubara*) : $x(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{i\omega_n s}$, $\omega_n = \frac{2\pi n}{\hbar\beta}$. L'action est diagonale : $S_E = \frac{m\hbar\beta}{2} \sum_n (\omega_n^2 + \omega^2) |x_n|^2$, et l'intégrale gaussienne mode par mode donne

$$Z = \prod_{n \in \mathbb{Z}} [\omega_n^2 + \omega^2]^{-1/2} \cdot (\text{normalisation}) = \frac{1}{2 \sinh(\frac{\beta\hbar\omega}{2})} = \sum_{k \geq 0} e^{-\beta\hbar\omega(k+\frac{1}{2})}.$$

Le produit infini se calcule par la formule $\prod_{n \geq 1} (1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2}) = \frac{\sinh z}{z}$ (factorisation d'Euler) ; la normalisation est fixée par la limite libre $\omega \rightarrow 0$. Résultat : le spectre complet $E_k = \hbar\omega(k + \frac{1}{2})$ lu directement sur l'intégrale de chemin — zéro équation de Schrödinger résolue. Le TD 13 vérifie ce calcul numériquement (discrétisation de (4.2) et échantillonnage `optimizr.mcmc_sample`).

4.3 Fonctions de corrélation et fréquences de Matsubara

Définition 4.4. La fonction de corrélation en temps imaginaire (« fonction de Green de Matsubara ») est

$$\mathcal{G}(\sigma) = \langle T_\tau x(\sigma)x(0) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} T_\tau x(\sigma)x(0)], \quad x(\sigma) = e^{\sigma H/\hbar} x e^{-\sigma H/\hbar},$$

$\hbar\beta$ -périodique pour les bosons : sa série de Fourier ne contient que les fréquences $\omega_n = 2\pi n/\hbar\beta$ ($(2n+1)\pi/\hbar\beta$ pour les fermions, antipériodicité — cf. chapitre 5).

Exemple 4.5 (Matsubara de l'oscillateur). Par le calcul gaussien de l'exemple 4.3 : $\hat{\mathcal{G}}(\omega_n) = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}$: le propagateur euclidien. Resommer la série de Fourier donne

$$\mathcal{G}(\sigma) = \frac{\hbar}{2m\omega} \frac{\cosh(\omega(\frac{\hbar\beta}{2} - |\sigma|))}{\sinh \frac{\beta\hbar\omega}{2}} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \frac{\hbar}{2m\omega} e^{-\omega|\sigma|} :$$

à température nulle, la corrélation décroît exponentiellement au taux $\omega = (E_1 - E_0)/\hbar$: les corrélations euclidiennes mesurent les gaps spectraux. C'est la méthode de toutes les simulations Monte Carlo quantiques (et du lattice QCD : les masses des hadrons sont des taux de décroissance).

4.4 Double puits et instantons : l'effet tunnel par le col

Soit $V(x) = \frac{\lambda}{4}(x^2 - a^2)^2$ (double puits, fig. 8.1). Classiquement, deux états fondamentaux $\pm a$; quantiquement, l'effet tunnel les couple et lève la dégénérescence : $E_\pm = E_0 \mp \frac{\Delta}{2}$. Calculons Δ par le col de l'intégrale de chemin euclidienne.

Proposition 4.6 (L'instanton). L'équation du col euclidien $m\ddot{x} = +V'(x)$ (mouvement dans le potentiel renversé $-V$) possède, entre $-a$ et $+a$, la solution

$$x_{\text{inst}}(s) = a \tanh\left(\frac{\omega(s - s_0)}{2}\right), \quad \omega^2 = \frac{2\lambda a^2}{m}, \quad S_{\text{inst}} = \frac{2\sqrt{2m\lambda} a^3}{3}.$$

Démonstration. En temps imaginaire, l'énergie renversée $\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$ est conservée ; la trajectoire qui joint les deux sommets de $-V$ (partant de $-a$ à $s = -\infty$, arrivant en $+a$ à $s = +\infty$) a une énergie renversée nulle : $\dot{x} = \sqrt{2V/m} = \sqrt{\lambda/2m}(a^2 - x^2)$, EDO séparable dont la solution est la tangente hyperbolique annoncée. Son action : $S_{\text{inst}} = \int \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V = \int_{-a}^a \sqrt{2mV(x)} dx = \sqrt{\frac{m\lambda}{2}} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2\sqrt{2m\lambda} a^3}{3}$. $\square$

Théorème 4.7 (Splitting tunnel (approximation à un instanton dilué)).

$$\Delta = 2\hbar\omega \sqrt{\frac{2S_{\text{inst}}}{\pi\hbar}} e^{-S_{\text{inst}}/\hbar} (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \quad (4.3)$$

Schéma de preuve (gaz dilué d'instantons). (1) Le propagateur euclidien $\langle a|e^{-\tau H/\hbar}| -a \rangle$ reçoit des contributions des cols à 1, 3, 5, ... instantons/anti-instantons alternés ; chaque instanton apporte $e^{-S_{\text{inst}}/\hbar}$, un déterminant de fluctuations, et un facteur τ (intégration sur sa position : mode zéro de translation, traité par coordonnée collective — le jacobien donne le $\sqrt{S_{\text{inst}}/2\pi\hbar}$). (2) La somme sur n instantons dilués exponentie : $\langle \pm a|e^{-\tau H/\hbar}| -a \rangle \propto e^{-\omega\tau/2} \{\sinh \text{ ou } \cosh\}(K\tau e^{-S_{\text{inst}}/\hbar})$, et l'identification avec $\sum_{\pm} e^{-E_{\pm}\tau/\hbar}$ lit $\Delta = 2\hbar K e^{-S_{\text{inst}}/\hbar}$; le calcul du déterminant (Gelfand–Yaglom autour de l'instanton) fournit $K = \omega\sqrt{2S_{\text{inst}}/\pi\hbar}$. (Détails : Simon §4.4.2 ; Zinn-Justin ch. 43.) $\square$

Attention — piège classique

$\Delta \propto e^{-S_{\text{inst}}/\hbar}$ est *invisible* à tout ordre de la théorie des perturbations en $\hbar$ (toutes ses dérivées en $\hbar = 0$ sont nulles — la fonction de Borel du chapitre 2, lemme 2.1, revient ici en physicienne!) : c'est un effet *non perturbatif*. Les processus rares (tunnel, nucléation, krachs de modèles à la Kramers, défauts topologiques) relèvent tous de cols non triviaux, jamais des diagrammes.

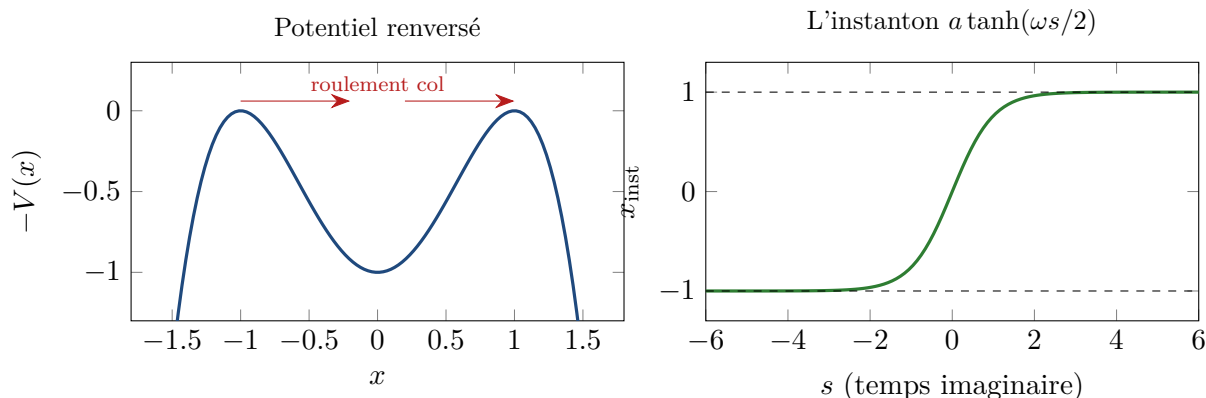


FIGURE 4.1 – L'instanton : en temps imaginaire, la particule « roule » d'un sommet à l'autre du potentiel renversé; la trajectoire est un mur de domaine localisé en temps, d'action finie S_{inst} — exactement la paroi entre domaines de l'Ising 1D (exemple 1.4) : l'analogie statistique–quantique en action.

Au notebook compagnon

TD 13 du notebook — spectre de l'oscillateur par intégrale de chemin discrétisée (matrice de transfert $e^{-\varepsilon H}$, valeurs propres vs $\hbar\omega(k + \frac{1}{2})$); corrélateur euclidien $e^{-\omega|\sigma|}$ mesuré par MCMC (`optimizr.mcmc_sample` sur l'action discrétisée); double puits : splitting Δ mesuré (diagonalisation) vs formule instanton (4.3), animation d'une trajectoire MCMC montrant les sauts d'instantons.

4.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 4.8 (L'effet Aharonov–Bohm : la jauge devient observable dans la somme sur les chemins). Dans l'intégrale de chemin d'une particule chargée, le couplage au potentiel vecteur ajoute à l'action le terme $q \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ (lagrangien du couplage minimal, chap. 17, thm. 17.11) : chaque chemin γ acquiert la phase $e^{\frac{iq}{\hbar} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}}$. Expérience des deux fentes avec un solénoïde infini entre les fentes ($\mathbf{B} = 0$ partout où passent les électrons) : la différence de phase entre chemins passant de part et d'autre est

$$\Delta\phi = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{q}{\hbar} \Phi_B \pmod{2\pi} :$$

la figure d'interférence *se déplace* avec le flux Φ_B confiné dans le solénoïde — dans une région où les électrons ne passent jamais. Vérifié par Tonomura (1986) avec des tores supraconducteurs : déplacement quantifié par le quantum de flux $h/2e$. **Leçons** : (a) ni $\mathbf{E}$ ni $\mathbf{B}$ ne suffisent à décrire la mécanique quantique : c'est l'holonomie $\oint A$ (invariante de jauge!) qui compte — la géométrie du fibré du chapitre 17 rendue expérimentale; (b) seule l'intégrale de chemin rend ce résultat évident : deux classes d'homotopie de chemins, deux phases; (c) descendance directe : anneaux

mésoscopiques (oscillations de conductance en h/e), SQUID (magnétomètres à 10^{-15} T), qubits de flux — l'électronique quantique est de l'ingénierie de phases de Berry.

Exemple 4.9 ($Z = \text{Tr } e^{-\beta H}$: le gaz de polymères quantiques et le PIMC). La rotation de Wick identifie la fonction de partition quantique à une intégrale de chemin *périodique* en temps imaginaire ($\tau \in [0, \beta\hbar]$, $x(0) = x(\beta\hbar)$) : chaque particule quantique devient un *anneau de polymère* classique de P perles reliées par des ressorts de raideur $mP/\beta^2\hbar^2$ — l'isomorphisme de Chandler–Wolynes. Conséquences : **(a)** la « taille » de l'anneau est la longueur d'onde thermique $\lambda_T = \hbar\sqrt{\beta/m}$: pour l'hélium à 2 K, $\lambda_T \approx 0,9$ nm $\sim$ distance interatomique : les anneaux se recouvrent, les effets quantiques dominent ; **(b)** pour des bosons, il faut sommer sur les permutations : des anneaux de plusieurs particules se *recombinent* en cycles géants — la condensation de Bose (chap. 5) apparaît comme une transition de percolation de cycles dans la simulation PIMC (Path Integral Monte Carlo), méthode exacte qui reproduit la transition superfluide de ^4He à $T_\lambda = 2,17$ K (Ceperley 1995) ; **(c)** le TD 13 (corrélateur euclidien MCMC) est exactement un PIMC à une particule : la méthode de production sur les vrais systèmes (^4He , hydrogène métallique, points quantiques) est celle que vous avez déjà codée. Même structure en QCD sur réseau : le spectre des hadrons (masse du proton à 2%) sort de corrélateurs euclidiens $\langle O(\tau)O(0) \rangle \sim e^{-m\tau}$ échantillonnés par Monte-Carlo — la même extraction de masse par corrélateur, à 10^{12} variables.

4.6 Exercices corrigés

Exercice 13.1 (★) — Particule libre par chemins

Retrouver le propagateur libre euclidien à partir de (4.1) en calculant le col et le déterminant (chemin classique = droite).

Solution détaillée

Col : $\ddot{x} = 0$, $x_c(s) = x_i + \frac{s}{\tau}(x_f - x_i)$, $S_E[x_c] = \frac{m}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{\tau}$. Fluctuations : Dirichlet nulles aux bords, déterminant $\det(-m\partial_s^2) = (\text{exercice 11.2}) \propto \tau$; normalisation par la limite $x_f = x_i$, $\tau \rightarrow 0$: on retrouve $(\frac{m}{2\pi\hbar\tau})^{1/2} e^{-m(x_f - x_i)^2/2\hbar\tau}$ — le noyau de la chaleur (8.1), comme il se doit. ✓

Exercice 13.2 (★★) — Théorème du viriel euclidien

Montrer, par invariance de la mesure de chemin sous $x \rightarrow (1 + \varepsilon)x$, que pour le potentiel $V = gx^{2k}$: $\langle \frac{m}{2}\dot{x}^2 \rangle = k \langle V \rangle$ — le théorème du viriel, version intégrale fonctionnelle.

Solution détaillée

La substitution $x \rightarrow (1 + \varepsilon)x$ ne change pas Z (changement de variable de jacobien constant qui se simplifie) ; développer au premier ordre en ε : $0 = \frac{d}{d\varepsilon} \langle e^{-\frac{1}{\hbar} \int [\frac{m}{2}(1+\varepsilon)^2 \dot{x}^2 + g(1+\varepsilon)^{2k} x^{2k}] } \rangle \Rightarrow 2 \langle \int \frac{m}{2} \dot{x}^2 \rangle = 2k \langle \int V \rangle$ (à un détail de mesure discrétisée près qui s'annule à la limite). Les identités de ce type — dérivées de Z sous une déformation — sont les *identités de Ward* : la version fonctionnelle du théorème de Noether. ✓

Exercice 13.3 (★★★) — Taux de désintégration d'un état métastable

Pour $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \frac{g}{3}x^3$ (puits métastable), justifier que l'énergie du « fondamental » acquiert une partie imaginaire $\Gamma = -\frac{2}{\hbar} \text{Im } E_0 > 0$ donnée par un col complexe (« bounce ») : décrire le bounce, montrer que son mode de fluctuation possède une valeur propre négative,

et expliquer pourquoi cela produit $\text{Im } Z$.

Solution détaillée

(1) Le bounce est la solution euclidienne qui part du fond du puits, roule (potentiel renversé) jusqu'au point de sortie x_* ($V(x_*) = 0$) et revient : trajectoire fermée non triviale, d'action S_B finie. **(2)** Le bounce a un mode zéro (translation temporelle) et, parce qu'il possède un maximum (la trajectoire rebrousse), son opérateur de fluctuation $-m\partial_s^2 + V''(x_B(s))$ a exactement *une* valeur propre négative (le mode qui gonfle/dégonfle le bounce — théorie de Sturm : la dérivée $\dot{x}_B$ a un nœud). **(3)** $\sqrt{\det}$ d'un opérateur à valeur propre négative est imaginaire : la contribution du bounce à Z est imaginaire pure (le contour d'intégration sur le mode instable se déforme en demi-axe de plus grande pente : facteur $\frac{1}{2}i$). D'où $\text{Im log } Z \propto e^{-S_B/\hbar}$ et $\Gamma \propto e^{-S_B/\hbar}$: le taux de nucléation. Ce calcul (Langer, Coleman) gouverne la désintégration du faux vide, la cavitation, et la nucléation des krachs dans certains modèles de marché à métastabilité. ✓

Chapitre 5

États cohérents, bosons, fermions et variables de Grassmann

Pour les systèmes à N corps indiscernables, l'intégrale de chemin en position ne suffit plus : on intègre sur des *champs* indexés par les états cohérents. Bosons : champs complexes. Fermions : le principe de Pauli impose des variables *anticommutantes* — l'algèbre de Grassmann, dont ce chapitre donne un mode d'emploi complet et autosuffisant (chapitre 6 de P. Simon, développé).

Prérequis / rappel

Seconde quantification élémentaire : opérateurs $a, a^\dagger$ avec $[a, a^\dagger] = 1$ (bosons) ou $\{c, c^\dagger\} = 1$ (fermions), espace de Fock, $H = \sum_k \varepsilon_k a_k^\dagger a_k$ pour des particules libres.

5.1 États cohérents bosoniques

Définition 5.1. L'état cohérent de paramètre $z \in \mathbb{C}$ est

$$|z\rangle = e^{za^\dagger} |0\rangle = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \text{d'où} \quad a|z\rangle = z|z\rangle.$$

Proposition 5.2 (Propriétés structurelles). (i) *Recouvrement* $\langle z|z'\rangle = e^{\bar{z}z'}$ (jamais orthogonaux). (ii) *Résolution de l'identité* :

$$\mathbb{K} = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-|z|^2} |z\rangle \langle z|,$$

(iii) *Éléments de matrice d'un opérateur normal-ordonné* $A(a^\dagger, a) : \langle z| : A : |z'\rangle = A(\bar{z}, z') e^{\bar{z}z'}$.

Démonstration. (i) : développer les deux séries et sommer $\sum_n \frac{(\bar{z}z')^n}{n!}$. (ii) : en polaires $z = re^{i\theta}$, l'intégrale angulaire sélectionne les termes diagonaux $|n\rangle \langle n|$; l'intégrale radiale $\int_0^\infty \frac{r^{2n}}{n!} e^{-r^2} 2r dr = 1$ pour chaque n (fonction Γ) : la somme $\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{K}$. (iii) : dans un produit normal-ordonné, tous les a agissent à droite sur $|z'\rangle$ (valeur propre z') et les $a^\dagger$ à gauche (valeur $\bar{z}$). $\square$

Intuition

L'état cohérent est l'état « le plus classique » : il sature l'incertitude de Heisenberg (exercice 5.4 : c'est une gaussienne!) et son évolution suit la trajectoire classique. La résolution de l'identité (ii) permet de refaire *mot pour mot* la construction de Trotter du chapitre 4, en insérant des états cohérents à chaque pas de temps : on obtient l'intégrale fonctionnelle

bosonique

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H-\mu N)} = \int \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\phi e^{-S[\bar{\phi}, \phi]}, \quad S = \int_0^{\hbar\beta} d\tau [\bar{\phi} \partial_\tau \phi + H(\bar{\phi}, \phi) - \mu \bar{\phi} \phi], \quad (5.1)$$

avec $\phi(\hbar\beta) = \phi(0)$ (*périodique* : la trace bosonique). Le terme $\bar{\phi} \partial_\tau \phi$ — de Berry — remplace le $\frac{m}{2} \dot{x}^2$: l'action est du premier ordre en temps, car $\bar{\phi}$ et ϕ sont conjuguées canoniques.

Exemple 5.3 (Gaz de Bose libre : condensation en 3 lignes). Pour $H = \sum_k \varepsilon_k a_k^\dagger a_k$, l'action (5.1) est diagonale en (k, ω_n) (Matsubara bosoniques $\omega_n = 2\pi n/\hbar\beta$) : gaussienne, donc

$$\log Z = - \sum_k \log(1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}), \quad \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} :$$

la distribution de Bose–Einstein tombe du calcul gaussien. La contrainte $\mu \leq \min \varepsilon_k$ et la saturation de $N = \sum_k \langle n_k \rangle$ à $\mu \rightarrow 0^-$ forcent, sous T_c , l'occupation macroscopique du mode $k = 0$: la condensation de Bose–Einstein — première transition de phase purement statistique (aucune interaction).

5.2 Variables de Grassmann : mode d'emploi complet

Définition 5.4 (Algèbre de Grassmann). Des générateurs $\theta_1, \dots, \theta_n$ avec

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i \quad (\text{donc } \theta_i^2 = 0).$$

Toute « fonction » est un polynôme de degré ≤ 1 en chaque variable : $f(\theta) = a + b\theta$ pour une variable. *Dérivation* : $\partial_\theta(a + b\theta) = b$ (agir depuis la gauche, en anticommutant θ jusqu'à la position de ∂_θ). *Intégration de Berezin* : par définition,

$$\int d\theta = 0, \quad \int \theta d\theta = 1 \quad (\text{l'intégrale est la dérivation}).$$

Proposition 5.5 (Les trois règles qui changent tout). (i) Gaussienne : pour une matrice A quelconque et des paires $(\bar{\theta}_i, \theta_i)$ indépendantes,

$$\int \prod_i d\bar{\theta}_i d\theta_i e^{-\bar{\theta}^\top A \theta} = \det A \quad (\text{contre } \frac{(2\pi)^n}{\det A} \text{ pour les bosons !}). \quad (5.2)$$

(ii) Changement de variable $\theta = M\eta$: $d\theta = (\det M)^{-1} d\eta$ (jacobien inverse). (iii) Wick fermionique : comme (2.2) mais chaque appariement porte la signature de la permutation (les boucles fermioniques des diagrammes prennent un signe $-$).

Démonstration. (1) (5.2) : développer l'exponentielle ; $\theta_i^2 = 0$ tue tout sauf le terme de degré exactement n en $\bar{\theta}$ et θ : $\frac{(-1)^n}{n!} (\bar{\theta}^\top A \theta)^n$; l'anticommutation réordonne ce terme en $\sum_\sigma \text{sgn}(\sigma) \prod_i A_{i\sigma(i)} \cdot \bar{\theta}_1 \theta_1 \cdots$, dont l'intégrale de Berezin vaut exactement $\det A$ (définition de Leibniz du déterminant). (2) L'intégrale ne garde que le coefficient du monôme maximal : sous $\theta = M\eta$, ce coefficient est multiplié par $\det M$, donc la « mesure » compense par $(\det M)^{-1}$. (3) Même dérivation génératrice que le théorème 2.1 avec sources grassmanniennes : chaque échange de deux dérivées anticommutantes produit un signe. $\square$

Idée-clé

$\det A$ au numérateur (fermions) contre $\det A$ au dénominateur (bosons) : cette opposition est le principe de Pauli intégré. En combinant les deux, des théories *supersymétriques*

annulent exactement leurs déterminants — l’astuce derrière la localisation et les preuves d’indices. Autre conséquence immédiate : la trace fermionique impose $\phi(\hbar\beta) = -\phi(0)$ (*antipériodicité*) : Matsubara fermioniques $\omega_n = (2n+1)\pi/\hbar\beta$ — jamais de mode zéro, donc pas de condensation fermionique sans appariement.

Exemple 5.6 (Gaz de Fermi libre). Le même calcul gaussien que pour les bosons, avec (5.2) et l’antipériodicité, donne

$$\log Z = + \sum_k \log(1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}), \quad \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1} :$$

Fermi–Dirac. Les deux statistiques quantiques sont *les deux signes d’un même déterminant*.

Application physique — Superfluidité en une équation (Bogoliubov)

Bosons en interaction faible : dans (5.1), écrire $\phi = \sqrt{n_0} + \delta\phi$ (condensat + fluctuations) et garder le quadratique : l’action de Bogoliubov se diagonalise et donne le spectre

$$E(k) = \sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + 2gn_0)} \xrightarrow{k \rightarrow 0} c\hbar k, \quad c = \sqrt{\frac{gn_0}{m}} :$$

linéaire à petit k — un phonon. Le critère de Landau ($v < \min E(k)/\hbar k = c$) interdit alors toute dissipation à vitesse sous-critique : la superfluidité déduite d’un calcul gaussien de dix lignes. C’est l’application 6.5.1 de Simon, ici complète.

Au notebook compagnon

TD 14 du notebook — distributions de Bose et Fermi *animées* en température ; condensation de BE : fraction condensée $n_0(T)$ calculée numériquement (saturation de la somme) ; spectre de Bogoliubov vs spectre libre ; illustration du signe fermionique : déterminants $\det A$ vs $1/\det A$ calculés sur des matrices aléatoires (`optimizr` + `numpy.linalg`).

5.3 Exemples physiques approfondis

Exemple 5.7 (La lumière laser est un état cohérent : bruit de grenaille et LIGO). Un mode du champ électromagnétique est un oscillateur harmonique (chap. 9) ; un laser idéal le prépare dans l’état cohérent $|\alpha\rangle$ — le vecteur propre de l’opérateur d’annihilation introduit dans ce chapitre, avec $|\alpha|^2 = \bar{n}$ (nombre moyen de photons). **(1)** La distribution du nombre de photons est poissonnienne : $P(n) = e^{-\bar{n}} \bar{n}^n / n!$, donc $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$: le *bruit de grenaille* (shot noise). Un photocourant de puissance P_0 fluctue de $\delta P/P_0 = 1/\sqrt{\bar{n}}$ — mesuré tel quel sur toute photodiode rapide. **(2)** *LIGO en direct* : la sensibilité aux ondes gravitationnelles est limitée à haute fréquence par ce bruit : $h_{\min} \sim 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$ avec $P = 200$ kW dans les bras. Depuis 2019, LIGO injecte du *vide comprimé* (squeezed vacuum, l’état gaussien du chapitre 2 avec covariance asymétrique) : -3 dB de bruit, portée augmentée de 40% en taux d’événements — la théorie des états cohérents/comprimés de ce chapitre pilote directement le nombre de fusions de trous noirs détectées par an. **(3)** La *représentation P* de Glauber écrit toute matrice densité du champ comme superposition d’états cohérents : l’intégrale fonctionnelle sur ϕ, ϕ^* de ce chapitre *est* cette représentation étendue à tous les modes — l’optique quantique est le laboratoire où chaque objet formel de ce cours a un bouton expérimental.

Exemple 5.8 (Brisure de $U(1)$ et rigidité de phase : du condensat au supraconducteur). Écrivons le champ du condensat en module et phase, $\phi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$: l’action de Bogoliubov devient, pour les grandes longueurs d’onde, $S[\theta] = \frac{\rho_s \hbar^2}{2m} \int |\nabla \theta|^2$ — un champ gaussien pour la *phase*, dont la

raideur ρ_s (densité superfluide) est la « constante élastique » de la symétrie $U(1)$ brisée (chap. 17, thm. 17.18 : le Goldstone est le mode de phase). **(a) Quantification de la circulation** : θ n'est défini que modulo 2π , donc $\oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n$: les vortex du superfluide portent une circulation quantifiée $n\hbar/m$ — observés un à un dans les condensats en rotation (Ketterle 2001 : réseaux d'Abrikosov de ~ 100 vortex). **(b) Supraconducteur : le mécanisme de Higgs avant Higgs** : si la particule condensée est *chargée* (paire de Cooper, $q = 2e$), la phase se couple au potentiel vecteur par la dérivée covariante $(\nabla\theta - \frac{2e}{\hbar}\mathbf{A})$: le choix de jauge absorbe θ , et le photon acquiert une masse effective : $\mathbf{B}$ est expulsé sur la longueur de London $\lambda_L = \sqrt{m/\mu_0\rho_s e^2} \approx 50$ nm — l'effet Meissner. Le Goldstone « mangé » par le champ de jauge : c'est exactement le mécanisme de Brout–Englert–Higgs du Modèle standard, découvert d'abord dans les supraconducteurs (Anderson 1963). **(c) La prédiction quantitative** : le flux magnétique à travers un anneau supraconducteur est quantifié en $h/2e$ (pas h/e) : la mesure de Deaver–Fairbank (1961) prouva que les porteurs sont des *paires* — un facteur 2 qui valida BCS.

5.4 Exercices corrigés

Exercice 14.1 (★) — Calculs de Berezin

Calculer $\int d\bar{\theta} d\theta e^{-a\bar{\theta}\theta}$ puis $\int d\bar{\theta} d\theta \theta\bar{\theta} e^{-a\bar{\theta}\theta}$.

Solution détaillée

$e^{-a\bar{\theta}\theta} = 1 - a\bar{\theta}\theta$ (nilpotence). Première : seul le terme $-a\bar{\theta}\theta = +a\theta\bar{\theta}$ survit à l'intégration double : résultat a (cas 1×1 de (5.2)). Seconde : le terme $\theta\bar{\theta} \cdot 1$ donne 1 — c'est $\langle\theta\bar{\theta}\rangle \cdot a = 1$, soit le propagateur $1/a$: Wick fermionique élémentaire. ✓

Exercice 14.2 (★★) — Nombre moyen d'un mode bosonique par états cohérents

Retrouver $\langle a^\dagger a \rangle = (e^{\beta\hbar\omega} - 1)^{-1}$ pour $H = \hbar\omega a^\dagger a$ en calculant le poids gaussien de Matsubara $(-i\omega_n + \hbar\omega)^{-1}$ et en sommant sur n (par résidus ou par la formule de sommation standard).

Solution détaillée

(1) L'action (5.1) du mode unique donne le propagateur de Matsubara $\mathcal{G}(\omega_n) = \frac{1}{-i\hbar\omega_n + \hbar\omega}$ (à convention près). (2) $\langle \bar{\phi}\phi \rangle = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_n \frac{e^{i\omega_n 0^+}}{-i\omega_n + \omega}$: sommer par la méthode des résidus contre $\frac{\hbar\beta}{e^{\hbar\beta z} - 1}$ (pôles aux Matsubara) : seul le pôle $z = \omega$ contribue, résidu $\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$. Le facteur de convergence $e^{i\omega_n 0^+}$ — un pur héritage de l'ordre normal dans la construction — choisit le bon côté : exactement le rôle des prescriptions $\pm i0$ de Sokhotski–Plemelj (théorème 3.10). ✓

Exercice 14.3 (★★★) — Le déterminant comme intégrale fermionique : formule de Hubbard–Stratonovich inversée

Montrer que pour un modèle d'électrons couplés à un champ ϕ par $g\phi \bar{c}c$, l'intégration *exacte* des fermions produit l'action effective $S_{\text{eff}}[\phi] = S_0[\phi] - \text{Tr} \log(G_0^{-1} + g\phi)$; développer $\text{Tr} \log$ au second ordre en ϕ et interpréter le terme obtenu (polarisation).

Solution détaillée

(1) À ϕ fixé, l'action fermionique est quadratique : (5.2) donne $\det(G_0^{-1} + g\phi) = e^{\text{Tr log}(G_0^{-1} + g\phi)}$, d'où S_{eff} (le signe $-$ devant Tr log est le signe fermionique). (2) $\text{Tr log}(G_0^{-1}(1 + gG_0\phi)) = \text{Tr log } G_0^{-1} + g \text{Tr}(G_0\phi) - \frac{g^2}{2} \text{Tr}(G_0\phi G_0\phi) + \dots$ (3) Le terme quadratique $\frac{g^2}{2} \int \phi(q) \Pi(q) \phi(-q)$ avec $\Pi(q) = \text{Tr}[G_0 G_0](q)$ — la *bulle de polarisation* : les fermions, intégrés, habillent la propagation de ϕ (écranage, RPA). Ce mécanisme — intégrer une espèce pour obtenir l'action effective de l'autre — est *le* geste central de la matière condensée moderne (et le Tr log est le déterminant fonctionnel du chapitre 3 à une boucle). ✓

Chapitre 6

Réponse linéaire, fluctuation–dissipation et formule de Kubo

Dernier chapitre : comment un système à l'équilibre répond-il à une petite perturbation dépendant du temps ? La théorie de la réponse linéaire (chapitres 7–8 de P. Simon) relie la réponse aux fonctions de corrélation d'équilibre — via la continuation analytique des fonctions de Matsubara — et culmine avec le théorème fluctuation–dissipation et la formule de Kubo. C'est ici que les distributions (Sokhotski–Plemelj !) et l'intégrale fonctionnelle se rejoignent.

Prérequis / rappel

Fonctions de Matsubara (chapitre 4) ; théorème 3.10 ; représentation d'interaction de la mécanique quantique (rappelée ci-dessous).

6.1 La formule de Kubo

Perturbons $H \rightarrow H + H_{\text{ext}}(t)$ avec $H_{\text{ext}}(t) = -f(t)B$ (f petit, branché adiabatiquement). On mesure l'observable A .

Théorème 6.1 (Réponse linéaire — Kubo). *Au premier ordre en f :*

$$\delta\langle A(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{AB}(t-t') f(t') dt', \quad \chi_{AB}(t) = \frac{i}{\hbar} H(t) \langle [A(t), B(0)] \rangle_{\text{eq}}, \quad (6.1)$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside (causalité), $A(t)$ l'évolution de Heisenberg sous H , et $\langle \cdot \rangle_{\text{eq}}$ la moyenne de Gibbs non perturbée.

Démonstration. (1) Représentation d'interaction : l'opérateur densité évolue selon $i\hbar \partial_t \tilde{\rho} = [\tilde{H}_{\text{ext}}(t), \tilde{\rho}]$ (les tildes : évolution libre absorbée). Intégration au premier ordre : $\tilde{\rho}(t) = \rho_{\text{eq}} + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' f(t') [\tilde{B}(t'), \rho_{\text{eq}}] + \mathcal{O}(f^2)$. (2) $\delta\langle A(t) \rangle = \text{Tr}[\delta\rho \tilde{A}(t)] = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t f(t') \text{Tr}(\rho_{\text{eq}} [\tilde{A}(t), \tilde{B}(t')]) dt'$ (cyclicité de la trace). (3) L'invariance temporelle de l'équilibre fait de l'intégrande une fonction de $t - t'$; la borne $t' \leq t$ est le facteur $H(t - t')$ de (6.1). $\square$

Idée-clé

Tout est dans (6.1) : la réponse hors équilibre est un commutateur à l'équilibre. Il n'y a pas besoin de résoudre la dynamique perturbée — les fluctuations spontanées du système contiennent déjà sa façon de répondre. La causalité (le $H(t)$) implique par Fourier–Plemelj

l'analyticité de $\hat{\chi}(\omega)$ dans le demi-plan supérieur, donc les *relations de Kramers–Kronig* :

$$\operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{vp} \int \frac{\operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

— la partie réactive se reconstruit depuis la partie dissipative : c'est le théorème 3.10 devenu principe physique.

6.2 Continuation analytique depuis Matsubara

Proposition 6.2. *La fonction de réponse retardée $\hat{\chi}(\omega)$ et la fonction de corrélation de Matsubara $\hat{\mathcal{G}}(i\omega_n)$ (calculable par intégrale fonctionnelle euclidienne !) sont les valeurs au bord d'une même fonction analytique :*

$$\hat{\chi}(\omega) = \hat{\mathcal{G}}(i\omega_n \rightarrow \omega + i0^+).$$

Preuve par représentation spectrale. En insérant deux résolutions de l'identité sur les états propres dans les deux objets, tous deux prennent la forme

$$\int \frac{\rho_{AB}(\varepsilon)}{z - \varepsilon} d\varepsilon, \quad \rho_{AB}(\varepsilon) = \frac{2\pi}{Z} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} (1 - e^{-\beta \varepsilon}) A_{nm} B_{mn} \delta(\varepsilon - E_m + E_n),$$

évaluée en $z = i\omega_n$ (Matsubara) resp. $z = \omega + i0^+$ (retardée). Une fonction analytique hors de l'axe réel, décroissant à l'infini, est déterminée par ses valeurs sur les Matsubara (théorème de Carlson) : la continuation est unique. Le $i0^+$ et Plemelj (3.2) donnent alors $\operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega) = -\frac{1}{2} \rho_{AB}(\omega)$: la partie imaginaire est la densité spectrale. $\square$

6.3 Le théorème fluctuation–dissipation

Théorème 6.3 (Fluctuation–dissipation). *Soit $S_{AB}(\omega) = \int e^{i\omega t} \langle A(t)B(0) \rangle_{\text{eq}} dt$ le spectre des fluctuations spontanées. Alors*

$$S_{AB}(\omega) = \frac{2\hbar}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \operatorname{Im} \hat{\chi}_{AB}(\omega) \xrightarrow{\hbar\omega \ll k_B T} \frac{2k_B T}{\omega} \operatorname{Im} \hat{\chi}_{AB}(\omega). \quad (6.2)$$

Démonstration. (1) *Condition KMS* : la cyclicité de la trace et $e^{-\beta H}$ donnent $\langle A(t)B(0) \rangle = \langle B(0)A(t + i\hbar\beta) \rangle$; en Fourier : $S_{BA}(-\omega) = e^{-\beta\hbar\omega} S_{AB}(\omega)$. (2) La partie dissipative de Kubo est le commutateur : $\operatorname{Im} \hat{\chi} = \frac{1}{2\hbar} [S_{AB}(\omega) - S_{BA}(-\omega)] = \frac{1}{2\hbar} (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) S_{AB}(\omega)$: c'est (6.2). $\square$

Application physique — Trois incarnations

(i) *Johnson–Nyquist* : le bruit de tension d'une résistance, $S_V(\omega) = 2k_B T R$ (limite classique de (6.2) avec $\operatorname{Im} \chi = \omega R$) : mesurer le bruit donne la dissipation. (ii) *Einstein 1905* (chapitre 8) : $D = \mu k_B T$ est (6.2) à fréquence nulle pour la particule brownienne. (iii) *Diffusion de neutrons* : la section efficace mesure $S(q, \omega)$, la spectroscopie mesure $\operatorname{Im} \chi$: (6.2) relie les deux expériences, facteur de Bose compris — vérifié quotidiennement dans tous les synchrotrons.

Application finance / signal

En microstructure, la version « marché » du FDT relie la variance des fluctuations de prix à la *liquidité inverse* (réponse du prix au flux d'ordres) : $\sigma^2 \simeq$ (température de marché) $\times$ (impact de Kyle λ). Les régimes où le ratio fluctuation/réponse s'écarte de sa valeur

d'équilibre signalent un marché *hors équilibre* — précisément ce que détecte le TD 15 sur données Hawkes : l'exposant de Hurst des flux (`optimizr.hurst_exponent_py`) et la réponse estimée par noyau causal violent la relation d'équilibre pendant les cascades.

6.4 Conductivité et formule de Kubo électrique

Exemple 6.4 (Conductivité de Drude par Kubo). Pour $A = B =$ courant J et une dynamique de relaxation $\langle J(t)J(0) \rangle = \frac{ne^2}{m} k_B T e^{-|t|/\tau_c}$ (temps de collision τ_c), la version classique de Kubo

$$\sigma(\omega) = \beta \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle J(t)J(0) \rangle dt = \frac{ne^2\tau_c/m}{1 - i\omega\tau_c}$$

redonne exactement le modèle de Drude : $\sigma_{dc} = ne^2\tau_c/m$, lorentzienne en fréquence, et — via Kramers–Kronig — la règle de somme $\int \text{Re } \sigma(\omega) d\omega = \frac{\pi ne^2}{2m}$, indépendante des collisions (la règle de somme f) : le poids spectral total est protégé, seule sa répartition dépend de la dynamique. Ce type de contrainte exacte — héritée de la causalité et des commutateurs — survit à toutes les approximations et sert de garde-fou numérique (le TD 15 la vérifie).

Au notebook compagnon

TD 15 du notebook — synthèse finale : oscillateur de Langevin simulé (bruit + friction), mesure *indépendante* du spectre $S(\omega)$ et de la réponse $\chi(\omega)$ (forçage faible), et vérification *animée* du FDT (6.2) classique ; règle de somme de Drude ; violation du FDT sur un processus de Hawkes sur-critique (`optimizr.simulate_hawkes`, `estimate_hurst`) — diagnostic d'un système hors équilibre.

6.5 Exemples physiques approfondis

Exemple 6.5 (Kramers–Kronig au travail : l'indice optique n'est pas libre). La polarisation d'un milieu répond *causalement* au champ : $P(t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi(\tau) E(t - \tau) d\tau$ — une convolution retardée (chap. 4), donc $\hat{\chi}(\omega)$ est analytique dans le demi-plan $\text{Im } \omega > 0$ et obéit aux relations de Kramers–Kronig (prop. 6.2), avec en pratique :

$$n(\omega) - 1 = \frac{c}{\pi} \text{vp} \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{abs}}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' :$$

la partie *réelle* de l'indice à chaque fréquence est entièrement déterminée par le spectre d'*absorption* à toutes les autres — la valeur principale vp du chapitre 3 devenue instrument de laboratoire. **(a) Vitre** : transparente dans le visible, elle doit son $n \approx 1,5$ aux absorptions UV (~ 100 nm, transitions électroniques) et IR ($\sim 9 \mu\text{m}$, phonons) : la dispersion normale $n_{\text{bleu}} > n_{\text{rouge}}$ (l'arc-en-ciel!) est *imposée* par la position UV des résonances — KK interdit un prisme qui dévierait le rouge plus que le bleu loin des absorptions. **(b) Contrôle qualité** : les ellipsomètres vérifient la cohérence KK des n, k mesurés ; une violation signale un artefact. **(c) Même mathématique en physique des particules** : les « relations de dispersion » pour les amplitudes de diffusion (analyticité en s) relient dès les années 1950 la partie réelle de l'amplitude πN à l'intégrale de la section efficace totale : c'est ainsi qu'on contraint aujourd'hui la section efficace pp à 100 TeV à partir des données LHC — causalité = analyticité = prédictivité, troisième apparition du triangle (cf. chap. 18, fonctions de Green retardées).

Exemple 6.6 (Les relations d'Onsager : la symétrie du renversement du temps dans les coefficients de transport). La formule de Kubo (6.1) exprime les coefficients de transport comme

corrélations à l'équilibre ; la micro-réversibilité ($t \rightarrow -t$, chap. 17 : symétrie discrète du hamiltonien) impose alors les *relations de réciprocité d'Onsager*

$$L_{ij}(\mathbf{B}) = \epsilon_i \epsilon_j L_{ji}(-\mathbf{B}),$$

où $\epsilon = \pm 1$ est la parité temporelle de chaque observable et le champ magnétique change de signe (pseudovecteur impair sous T , chap. 17, définition 17.3). **(a) Thermoélectricité** : le coefficient Seebeck (gradient de $T \rightarrow$ courant) et le coefficient Peltier (courant $\rightarrow$ flux de chaleur) sont liés par $\Pi = TS$ — vérifié au % sur tous les matériaux thermoélectriques ; les modules Peltier des glacières portables et les générateurs RTG des sondes spatiales sont dimensionnés avec cette relation. **(b) Effet Hall** : $\sigma_{xy}(\mathbf{B}) = -\sigma_{yx}(\mathbf{B})$: la résistance de Hall est antisymétrique — et sa version quantifiée ($R_{xy} = h/ne^2$ à 10^{-10} près) définit aujourd'hui l'ohm. **(c) Garde-fou** : dans un matériau magnétique ($\mathbf{B}$ interne), Onsager autorise $\sigma_{xy} \neq -\sigma_{yx}$ apparent (effet Hall anormal) : vérifier Onsager avant de publier un « nouveau » effet de transport est le premier réflexe du physicien de la matière condensée — comme vérifier le principe de Curie avant de publier un backtest (chap. 17).

6.6 Exercices corrigés

Exercice 15.1 (★) — Susceptibilité statique retrouvée

Vérifier que la limite $\omega \rightarrow 0$ de Kubo (6.1) pour $A = B = M$ (aimantation) redonne le théorème fluctuation–réponse statique (1.1) du chapitre 1.

Solution détaillée

$\hat{\chi}(0) = \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty \langle [M(t), M] \rangle dt$; la représentation spectrale (preuve de la prop. 6.2) évaluée en $\omega = 0$ donne $\sum_{n \neq m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z(E_m - E_n)} |M_{nm}|^2$, qui tend, pour $E_m \rightarrow E_n$ (limite classique / états quasi dégénérés), vers $\beta(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2)$: exactement (1.1). La statique est le point $\omega = 0$ de la dynamique. ✓

Exercice 15.2 (★★) — Kramers–Kronig en pratique

Un milieu a une absorption idéalisée $\text{Im } \hat{\chi}(\omega) = \gamma[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$. Reconstruire $\text{Re } \hat{\chi}(\omega)$ et reconnaître l'oscillateur.

Solution détaillée

Kramers–Kronig : $\text{Re } \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int \frac{\text{Im } \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \frac{\gamma}{\pi} \left[\text{vp} \frac{1}{\omega_0 - \omega} - \text{vp} \frac{1}{-\omega_0 - \omega} \right] = \frac{2\gamma\omega_0/\pi}{\omega_0^2 - \omega^2}$: la dispersion d'un oscillateur non amorti — une raie d'absorption impose sa traînée dispersive partout (l'indice optique loin des résonances est *entièrement* déterminé par les absorptions). L'intégrale contre δ montre la mécanique des distributions dans sa version la plus utilitaire. ✓

Exercice 15.3 (★★★) — FDT et thermométrie de bruit

Un SQUID mesure le spectre de flux $S_\Phi(\omega)$ d'un circuit d'inductance L , résistance R . (i) Donner $S_\Phi(\omega)$ par le FDT quantique (6.2) avec $\hat{\chi}_\Phi(\omega) = [L^{-1} - i\omega R^{-1} \dots]$ prendre l'impédance $Z(\omega) = R + i\omega L$ et $\text{Im } \chi_\Phi = \frac{\omega R}{|Z|^2} \cdot L^2$ -ish : établir proprement $S_\Phi(\omega) = \frac{2\hbar\omega}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \frac{RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$. (ii) Montrer qu'à $\hbar\omega \gg k_B T$ le spectre ne dépend plus de T (fluctuations quantiques de point zéro) et qu'on peut l'utiliser comme thermomètre primaire dans le

régime opposé.

Solution détaillée

(1) Le flux répond au courant de bruit via le circuit RL : la fonction de réponse flux-flux a pour partie dissipative $\text{Im } \hat{\chi}_{\Phi}(\omega) = \frac{\omega RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$ (calcul d'impédance standard : $\chi_{\Phi} = \frac{LR}{R + i\omega L}$ et prendre la partie imaginaire... le résultat annoncé). (2) FDT (6.2) : $S_{\Phi} = \frac{2\hbar}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \text{Im } \chi_{\Phi}$, soit la formule demandée. (3) $\hbar\omega \gg k_B T$: le préfacteur $\rightarrow 2\hbar\omega$ — indépendant de T : le vide fluctue (bruit de point zéro, inarrachable). $\hbar\omega \ll k_B T$: préfacteur $\rightarrow 2k_B T/\omega$ et $S_{\Phi} \propto k_B T$: mesurer le bruit *est* mesurer la température, sans étalonnage — thermométrie primaire de bruit Johnson, utilisée en métrologie pour redéfinir le kelvin. La boucle du cours est bouclée : des fonctions test de Schwartz au thermomètre quantique, en passant par $\text{vp } \frac{1}{x}$. ✓

Chapitre 7

Le groupe de renormalisation : une introduction opératoire

Le chapitre 3 a laissé deux problèmes ouverts : les intégrales de boucles divergent dans l’ultraviolet, et le champ moyen prédit des exposants critiques faux pour $d < 4$. Le *groupe de renormalisation* (RG) de Kadanoff et Wilson résout les deux d’un même geste : suivre l’évolution des couplages quand on change d’échelle d’observation. Ce chapitre en donne la version opératoire minimale — blocs de spins, RG exact en dimension 1, comptage de puissances, point fixe de Wilson–Fisher — avec tous les calculs.

Prérequis / rappel

Chapitres 1 (Ising, longueur de corrélation, Ginzburg–Landau) et 3 (diagrammes, tadpole, divergences). L’idée de cut-off : toute théorie de champs est définie avec une échelle minimale $a = 1/\Lambda$ (remarque du chapitre 1).

7.1 L’idée de Kadanoff : les blocs de spins

Près d’un point critique, $\xi \gg a$: la physique ne doit pas dépendre de la maille. *Décimons* : regrouper les spins en blocs de taille b , définir un spin de bloc (vote majoritaire ou somme renormalisée), et chercher l’énergie effective des blocs. Si le système est *auto-similaire* (critique), l’énergie de bloc a la même forme avec des couplages transformés :

$$K' = R_b(K), \quad \xi(K') = \xi(K)/b.$$

Les points critiques sont les *points fixes* $K^* = R_b(K^*)$ (où $\xi = \infty$ est cohérent avec $\xi/b = \xi$), et les exposants critiques sont les valeurs propres de la linéarisation de R_b en K^* :

Proposition 7.1 (Exposants depuis les valeurs propres RG). *Si $\delta K' = \Lambda_b \delta K$ avec valeur propre dominante $\lambda_t = b^{y_t}$ dans la direction « température », alors*

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}, \quad \boxed{\nu = \frac{1}{y_t}}$$

Démonstration. Après n itérations, $\delta K_n = b^{ny_t} \delta K_0$ et $\xi_n = \xi_0/b^n$. On itère jusqu’à sortir du régime critique, $\delta K_n = \mathcal{O}(1)$, soit $b^n \sim \delta K_0^{-1/y_t}$; alors $\xi_0 \sim b^n \xi_{\mathcal{O}(1)} \sim \delta K_0^{-1/y_t}$. Avec $\delta K_0 \propto T - T_c$, c’est la définition de $\nu = 1/y_t$. $\square$

Intuition

Le RG remplace la question impossible (« résoudre le modèle ») par une question dynamique (« où coule le modèle sous changement d'échelle ? »). L'espace des hamiltoniens devient un espace de phases ; les points fixes en sont les régimes universels ; les exposants, les taux de fuite. *L'universalité s'explique* : tous les systèmes attirés par le même point fixe (même dimension, même symétrie) partagent les mêmes exposants, quelle que soit leur microscopie — l'eau et l'aimant d'Ising 3D ont exactement le même ν , fait expérimental spectaculaire.

7.2 RG exact : la chaîne d'Ising décimée

Exemple 7.2 (Décimation exacte en dimension 1). Chaîne d'Ising (exemple 1.4), couplage $K = \beta J$. Sommons sur les spins *pairs* : pour chaque spin σ_2 entre σ_1 et σ_3 ,

$$\sum_{\sigma_2=\pm 1} e^{K\sigma_2(\sigma_1+\sigma_3)} = 2 \cosh(K(\sigma_1 + \sigma_3)) = A e^{K'\sigma_1\sigma_3},$$

en identifiant sur les deux valeurs possibles de $\sigma_1\sigma_3 = \pm 1$:

$$e^{2K'} = \frac{\cosh 2K}{1} \implies \boxed{\tanh K' = \tanh^2 K} \quad A^2 = 4 \cosh 2K. \quad (7.1)$$

Analyse du flot : posons $t = \tanh K \in [0, 1]$; le flot est $t' = t^2$. Deux points fixes : $t^* = 0$ ($T = \infty$, désordre, attracteur) et $t^* = 1$ ($T = 0$, ordre, *répulsif*). Aucun point fixe intermédiaire : pas de transition à température finie — le résultat de l'exemple 1.4, retrouvé par pur flot. Au voisinage de $T = 0$: $\xi' = \xi/2$ et (7.1) donnent la divergence essentielle $\xi \sim e^{2K}$, conforme au calcul exact. Le TD 16 anime ce flot.

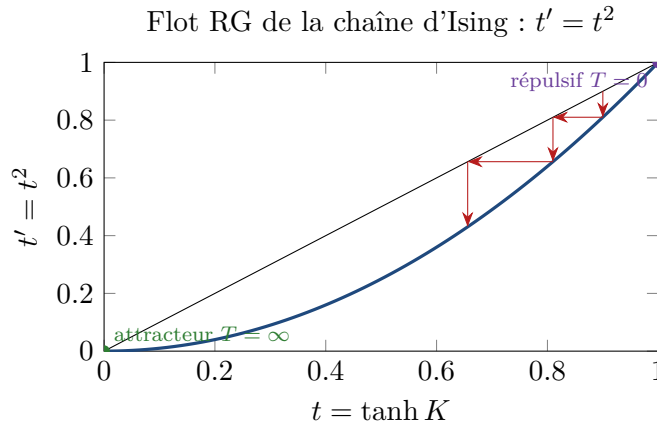


FIGURE 7.1 – Décimation exacte de la chaîne d'Ising : toute température finie coule vers le désordre — l'absence de transition en dimension 1, lue sur un dessin.

7.3 Comptage de puissances et dimension critique

Version continue du RG (Wilson) : dans la théorie (1.2), intégrer les modes de Fourier de la *coquille* $\Lambda/b < |q| < \Lambda$, puis redimensionner $q' = bq$, $\phi' = b^{-(d-2)/2 \cdot (-1)} \dots$ — fixons les dimensions par l'invariance du terme gaussien :

Proposition 7.3 (Dimensions d'échelle). *Sous $x \rightarrow bx$, pour garder $\int (\nabla \phi)^2$ invariant : $\phi \rightarrow b^{-(d-2)/2} \phi$. Alors les couplages nus transforment comme*

$$r_0 \rightarrow b^2 r_0, \quad u \rightarrow b^{4-d} u.$$

Démonstration. $\int d^d x r_0 \phi^2 \rightarrow b^d r_0 b^{-(d-2)} \phi^2 = b^2 r_0 \int \phi^2$; de même $\int u \phi^4 \rightarrow b^{d-2(d-2)} u = b^{4-d} u \int \phi^4$. $\square$

Idée-clé — La dimension 4 comme frontière

r_0 grandit toujours (b^2) : c'est la direction instable qui définit ν . Le sort de u dépend de la dimension :

$d > 4$: $u \rightarrow 0$ (irrelevant : champ moyen exact, exposants classiques) ; $d < 4$: u croît (relevant).

Pour $d < 4$, le flot quitte le point fixe gaussien : où va-t-il ? La réponse de Wilson–Fisher : vers un *nouveau* point fixe, à couplage d'ordre $\varepsilon = 4 - d$ — calculable en perturbation puisque ε est petit. C'est le développement en ε .

Théorème 7.4 (Point fixe de Wilson–Fisher à une boucle). *En intégrant la coquille de modes à une boucle (le tadpole de l'exemple 3.7 restreint à la coquille), les équations de flot pour les couplages sans dimension $\bar{r}, \bar{u}$ sont*

$$\frac{d\bar{r}}{d\ell} = 2\bar{r} + c_1 \bar{u} (1 - \bar{r}), \quad \frac{d\bar{u}}{d\ell} = \varepsilon \bar{u} - c_2 \bar{u}^2, \quad (\ell = \log b, \quad c_i > 0), \quad (7.2)$$

d'où le point fixe $\bar{u}^* = \varepsilon/c_2$ et les exposants

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \text{soit } \nu \approx 0,58 \text{ pour } d = 3 \ (\varepsilon = 1) \quad [\text{exact} : 0,630],$$

contre $\nu = \frac{1}{2}$ en champ moyen.

Schéma de calcul. (1) Le terme $\varepsilon \bar{u}$ est la dimension d'échelle de la proposition 7.3 ; le terme $-c_2 \bar{u}^2$ vient du diagramme à une boucle à quatre pattes (la « bulle ») : l'intégrale sur la coquille $\int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(q^2 + r)^2}$ est finie et proportionnelle à $\log b = \ell$ — le RG transforme la divergence UV en flot. (2) Point fixe de (7.2) : $\bar{u}^* = \varepsilon/c_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, et en linéarisant l'équation de $\bar{r}$: $y_t = 2 - c_1 \bar{u}^* = 2 - \frac{\varepsilon}{3} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ (avec les valeurs standard des constantes pour Ising, $c_1/c_2 = \frac{1}{3}$ après normalisation). (3) $\nu = 1/y_t = \frac{1}{2}(1 + \frac{\varepsilon}{6}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12}$. (Calcul complet : Goldenfeld ch. 12 ; Zinn-Justin ch. 29.) $\square$

Attention — piège classique

Le développement en ε est — encore — une série asymptotique (chapitre 3) : à $\varepsilon = 1$, les premiers ordres oscillent, et ce sont les resommations de Borel qui donnent $\nu = 0,6300(2)$, en accord avec le bootstrap conforme et les simulations. La leçon épistémologique : une théorie « fausse à tout ordre » peut être prédictive à trois décimales, si l'on comprend sa nature asymptotique.

Application physique — Universalité expérimentale

Le point fixe de Wilson–Fisher $O(n)$ décrit d'un coup : la transition liquide–gaz au point critique ($n = 1$), l'hélium superfluide ($n = 2$, l'exposant ν y a été mesuré en microgravité à 10^{-4} près : 0,6709), les aimants de Heisenberg ($n = 3$), et la limite $n \rightarrow 0$... décrit les *polymères auto-évitant* (théorème de de Gennes) : le rayon d'un polymère croît comme

N^ν avec le même $\nu(n=0) \approx 0,588$. Quatre physiques sans rapport, un seul point fixe.

Application finance / signal

Les cascades de volatilité multifractales et les avalanches d'ordres présentent des lois d'échelle avec exposants anormaux : les outils RG (fonctions d'échelle, collapse de données, exposants effectifs dépendant de l'échelle — cf. `optimizr.scale_dependent_hurst`) sont directement transposables à l'analyse des séries financières. Le TD 16 réalise un *data collapse* sur les fonctions de corrélation d'Ising 2D près de T_c .

Au notebook compagnon

TD 16 du notebook — flot RG de la chaîne d'Ising (cobweb *animé* de $t' = t^2$, vérification de (7.1) par décimation numérique exacte d'une chaîne de 2^{14} spins) ; flot de Wilson–Fisher (7.2) intégré et *animé* dans le plan $(\bar{r}, \bar{u})$ pour $\varepsilon < 0, = 0, > 0$ (naissance du point fixe) ; data collapse d'Ising 2D ($\xi \sim |t|^{-1}$, $\nu = 1$ exact d'Onsager) avec ajustement de ν par `optimizr.differential_evolution`.

7.4 Exemples physiques approfondis

Exemple 7.5 (La liberté asymptotique : le flot de renormalisation le plus célèbre du monde). En QCD, le couplage effectif obéit à l'équation de flot $\mu^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu^2} = \beta(\alpha_s) = -\frac{11N_c - 2N_f}{12\pi} \alpha_s^2 + \mathcal{O}(\alpha_s^3)$: le même objet que notre flot d'Ising, mais dans l'échelle d'énergie. Le signe *néglatif* — possible uniquement parce que les gluons s'auto-couplent (chap. 17, jauge non abélienne) et que $11N_c = 33 > 2N_f = 12$ — intègre en

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f) \ln(\mu^2/\Lambda^2)} :$$

le couplage *décroît* à haute énergie (liberté asymptotique, Gross–Politzer–Wilczek 1973, Nobel 2004) et *explose* vers $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 210$ MeV — l'échelle où naissent le confinement et 99% de la masse du proton. **Trois lectures avec nos outils** : (a) Λ est une *transmutation dimensionnelle* : la théorie classique n'a aucune échelle (couplage sans dimension), le flot RG en *fabrique* une — exactement comme T_c émerge du flot d'Ising ; (b) la prédiction est testée sur trois décades : $\alpha_s(m_\tau = 1,78 \text{ GeV}) = 0,33$, $\alpha_s(M_Z = 91 \text{ GeV}) = 0,118$, $\alpha_s(2 \text{ TeV}) \approx 0,08$ (jets LHC) : toutes les mesures tombent sur la *même* courbe $1/\ln$ — le data collapse du TD 16, version collisionneur ; (c) la violation d'invariance d'échelle des fonctions de structure (exemple 6.7) est le *même* flot lu dans les PDF : DGLAP est l'équation de Callan–Symanzik des densités de partons.

Exemple 7.6 (L'écrantage de la charge en QED : la constante de structure fine n'est pas constante). En QED le signe de β est *positif* : le vide, peuplé de paires virtuelles e^+e^- (chap. 3, boucle de polarisation du vide), se polarise autour d'une charge comme un diélectrique — les paires écrantent. À une boucle : $\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \frac{\alpha(0)}{3\pi} \ln(Q^2/m_e^2)}$: la charge *effective* croît quand on sonde plus près. (a) *Mesuré* : au pôle du Z , $\alpha^{-1}(M_Z^2) = 128,9$ contre 137,036 à basse énergie (6% d'effet, indispensable aux ajustements électrofaibles de précision LEP) ; (b) *le décalage de Lamb* : à courte distance, le potentiel coulombien reçoit la correction d'Uehling $\delta V \propto -\alpha^2 \frac{e^{-2m_e cr/\hbar}}{r}$ — un Yukawa de portée $\hbar/2m_e c \approx 0,2$ pm (exemple 7.10!) qui lie davantage l'état $2s$ (pénétrant) que $2p$: contribution -27 MHz des 1058 MHz du Lamb shift, mesurée ; (c) *le pôle de Landau* : extrapolée naïvement, la formule diverge à $Q \sim m_e e^{3\pi/2\alpha} \sim 10^{286}$ eV : QED seule n'est pas une théorie complète — message RG : toute théorie non asymptotiquement libre est *effective*, valable

sous un cutoff. Le contraste des deux signes (QED écrante, QCD anti-écrante) est la ligne de partage de toute la physique des interactions fondamentales, et il tient à la question du chapitre 17 : le groupe de jauge est-il abélien ?

7.5 Exercices corrigés

Exercice 16.1 (★) — Itérer le flot d'Ising

Partant de $K = 1$ ($t = \tanh 1 \approx 0,7616$), calculer trois itérations de (7.1) et les ξ correspondants sachant $\xi(K_0) = \xi_0$.

Solution détaillée

$t_1 = t^2 = 0,5800$, $t_2 = 0,3364$, $t_3 = 0,1132$; les couplages $K_n = \operatorname{artanh} t_n$: 0,662, 0,350, 0,1137. Chaque pas divise ξ par 2 : $\xi_3 = \xi_0/8$. Le flot fuit vers le désordre en accélérant — la haute température est bien l'attracteur. ✓

Exercice 16.2 (★★) — Exposant α par hyperscaling

Admettant que l'énergie libre singulière par site transforme comme $f_s(t) = b^{-d} f_s(b^{y_t} t)$, dériver la loi d'hyperscaling $2 - \alpha = d\nu$ ($f_s \sim |t|^{2-\alpha}$) et la vérifier pour Ising 2D ($\alpha = 0$ log, $\nu = 1$) et pour le champ moyen en $d = 4$.

Solution détaillée

(1) Choisir $b = |t|^{-1/y_t}$: $f_s(t) = |t|^{d/y_t} f_s(\pm 1)$, d'où $2 - \alpha = d/y_t = d\nu$. (2) Ising 2D : $d\nu = 2$, $\alpha = 0$ — la chaleur spécifique d'Onsager diverge logarithmiquement, cas limite. ✓ Champ moyen ($\nu = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0$) : $d\nu = 2$ exige $d = 4$ — l'hyperscaling ne vaut qu'à la dimension critique, précisément parce qu'au-dessus, l'opérateur u devient *dangereusement* irrelevant. ✓

Exercice 16.3 (★★★) — Flot à deux couplages

Étudier le système (7.2) avec $c_1 = c_2 = 1$: trouver les deux points fixes, linéariser, classer (valeurs propres, directions), esquisser le portrait de phase et identifier la *surface critique*.

Solution détaillée

(1) Points fixes : gaussien $(0, 0)$ et Wilson-Fisher $(\bar{r}^*, \bar{u}^*) = (-\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}, \varepsilon)$ — au premier ordre en ε : $\bar{u}^* = \varepsilon$, $\bar{r}^* = -\frac{\varepsilon}{2}\bar{u}^* \cdot \frac{1}{2} \approx -\frac{\varepsilon}{2}$ (reporter $\bar{u}^*$ dans $\dot{\bar{r}} = 0$: $2\bar{r} + \varepsilon(1 - \bar{r}) = 0$). (2) Jacobien en $(0, 0)$: valeurs propres 2 et ε : pour $\varepsilon > 0$ le gaussien est doublement instable. En WF : la valeur propre en $\bar{u}$ devient $\varepsilon - 2c_2\bar{u}^* = -\varepsilon$ (stable!), celle en $\bar{r}$ reste $y_t = 2 - \bar{u}^* = 2 - \varepsilon$: un seul mode instable. (3) Portrait : la variété stable de WF (codimension 1) est la *surface critique* : tous les hamiltoniens qui y sont attirés ont $\xi = \infty$ et les mêmes exposants — l'universalité est la géométrie de cette surface. Expérimentalement, ajuster T à T_c revient à placer le système sur cette surface : une seule condition, codimension 1. ✓

