

Cours IV — Symétries, relativité et électromagnétisme

Groupes, Noether, jauge, Lorentz (chapitres 17–18)

HFThot Research Lab

d'après J.-B. Zuber (Symétries en physique) et A. Comtet (Relativité et électromagnétisme)

Juillet 2026

Présentation

Partie IV du cours *Des distributions à la théorie statistique des champs*. Elle ouvre sur les symétries en physique (groupes, Noether, jauge, brisure spontanée) et sur la relativité restreinte avec l'électromagnétisme covariant, en réinvestissant tous les outils des parties I–III. Chaque chapitre se termine par des exercices corrigés gradués.

Table des matières

1	Symétries en physique : groupes, lois de conservation, brisure	1
1.1	Transformations, groupes, premiers exemples	1
1.2	Scalars, vecteurs, tenseurs, pseudo-objets	2
1.3	Le principe de Curie	3
1.4	Groupes continus, générateurs, théorème de Noether	3
1.5	L'invariance de jauge : de $U(1)$ global à l'électrodynamique	4
1.6	Représentations : pourquoi les niveaux se dégènèrent	5
1.7	Brisure spontanée de symétrie et théorème de Goldstone	5
1.8	Exercices corrigés	6
2	Relativité restreinte et électromagnétisme covariant	9
2.1	L'intervalle, structure causale, temps propre	9
2.2	Transformations de Lorentz et diagrammes de Minkowski	10
2.3	Quadrivecteurs, dynamique, collisions	10
2.4	Le tenseur électromagnétique et les équations de Maxwell	11
2.5	Transformation des champs : le faisceau qui devient aimant	12
2.6	Potentiels retardés, Liénard–Wiechert, rayonnement	12
2.7	Exercices corrigés	13

Chapitre 1

Symétries en physique : groupes, lois de conservation, brisure

Ce chapitre transpose le cours de J.-B. Zuber *Symétries en physique* dans le langage construit aux parties A–C. Le fil conducteur est le triptyque de la physique moderne : *symétrie* $\Rightarrow$ *loi de conservation* $\Rightarrow$ *contrainte sur la dynamique*. On verra que les distributions (chap. 3), la transformée de Fourier (chap. 5) et l'intégrale fonctionnelle (chap. 11) sont exactement les outils qui rendent ces énoncés opératoires : le peigne de Dirac encode un cristal, les caractères d'un groupe sont une base de Fourier, et la brisure spontanée de symétrie est une propriété de la mesure fonctionnelle.

Prérequis / rappel

Chapitre 1 (changements de variables, jacobiens) ; chapitre 5 (peigne de Dirac, formule de Poisson) ; le chapitre 10 sera utile pour la brisure spontanée (§1.7). Algèbre linéaire : matrices orthogonales et unitaires, diagonalisation, valeurs propres. Aucune connaissance préalable de la théorie des groupes n'est supposée : tout est construit ici.

1.1 Transformations, groupes, premiers exemples

Définition 1.1 (Groupe). Un *groupe* $(G, \cdot)$ est un ensemble muni d'une loi de composition associative, possédant un élément neutre e , et telle que tout élément g admette un inverse g^{-1} . Le groupe est *abélien* si $gh = hg$ pour tous g, h .

Exemple 1.2 (Les groupes du physicien). **(a)** Les translations de $\mathbb{R}^d$: $T_a(x) = x+a$, $T_a T_b = T_{a+b}$, abélien. **(b)** Les rotations-réflexions $O(d) = \{R \in M_d(\mathbb{R}) : R^T R = \mathbf{1}\}$; le sous-groupe $SO(d)$ ($\det R = 1$) des rotations pures. $SO(2)$ est abélien, $SO(3)$ ne l'est pas. **(c)** Le groupe des phases $U(1) = \{e^{i\alpha}\}$ — celui de la mécanique quantique et de l'électrodynamique. **(d)** Le groupe de symétrie du triangle équilatéral, $D_3 = \{e, r, r^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (2 rotations de $\pm 120^\circ$, 3 réflexions) : 6 éléments, non abélien — le plus petit groupe non abélien, et le groupe de la molécule d'ammoniac NH_3 . **(e)** Le groupe d'un réseau cristallin : translations $\{n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3\}$ + groupe ponctuel compatible (32 classes cristallines en $d = 3$).

Intuition

Une *symétrie* n'est pas une transformation quelconque : c'est une transformation qui laisse quelque chose d'observable invariant (la forme d'une molécule, le lagrangien, la mesure de Boltzmann). L'ensemble des symétries d'un objet forme automatiquement un groupe : composer deux invariances en donne une troisième. Toute la puissance de la méthode vient de ce que le groupe peut être étudié *une fois pour toutes*, indépendamment de l'objet.

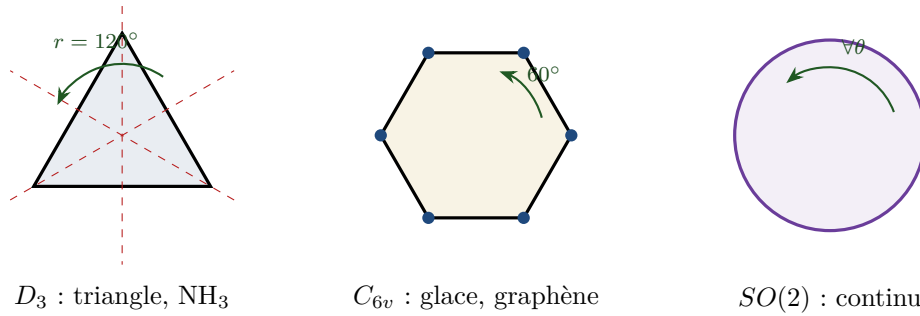


FIGURE 1.1 – Trois groupes de symétrie : fini non abélien (D_3), fini cristallographique (C_{6v}), continu ($SO(2)$). La physique de l’objet (modes de vibration, diffraction, lois de conservation) est dictée par son groupe.

Application physique

Pourquoi la glace fait des flocons hexagonaux. La molécule H_2O cristallise en réseau hexagonal (groupe C_{6v} dans le plan) : la croissance dendritique amplifie l’anisotropie microscopique, et le flocon macroscopique *hérte* de la symétrie d’ordre 6 du réseau — illustration du *principe de Curie* (§1.3) : les symétries des causes (le cristal) se retrouvent dans les effets (le flocon).

1.2 Scalaires, vecteurs, tenseurs, pseudo-objets

Comment les grandeurs physiques se transforment-elles sous une rotation $R \in O(3)$?

Définition 1.3 (Grandeurs tensorielles). Sous $x \mapsto x' = Rx$: un *scalaire* est invariant (T , la température) ; un *vecteur* se transforme comme $V'_i = R_{ij}V_j$ (vitesse, champ électrique) ; un *tenseur de rang 2* comme $T'_{ij} = R_{ik}R_{jl}T_{kl}$ (conductivité, contrainte, susceptibilité) ; un *pseudovecteur* comme $V'_i = (\det R) R_{ij}V_j$ (champ magnétique, moment cinétique) ; un *pseudoscalaire* comme $s' = (\det R)s$ (hélicité, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$).

Attention — piège classique

$\mathbf{B}$ n’est *pas* un vecteur ! Sous une réflexion-miroir, le champ magnétique se transforme à l’envers d’une flèche ordinaire ($\mathbf{B}$ est engendré par des boucles de courant : le miroir renverse le sens de circulation). Confondre vecteurs et pseudovecteurs fait rater des règles de sélection entières — c’est l’erreur qui a retardé la découverte de la violation de la parité (Wu, 1957).

Exemple 1.4 (La conductivité d’un cristal hexagonal n’a que deux composantes). Soit σ_{ij} le tenseur de conductivité d’un cristal de groupe ponctuel C_6 (axe z d’ordre 6). L’invariance impose $R\sigma R^T = \sigma$ pour R = rotation de 60° autour de z . **Calcul** : dans le bloc (x, y) , σ commute avec une rotation d’angle 60° ; or les seules matrices 2×2 commutant avec une rotation d’angle $\neq 0, \pi$ sont $a\mathbf{1} + b i\sigma_y$ (multiples de l’identité et du générateur de rotation) ; la symétrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (relations d’Onsager, chap. 15) tue la partie antisymétrique. Donc

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\parallel \end{pmatrix} :$$

deux coefficients indépendants au lieu de neuf. Le graphite illustre ce résultat de façon spectaculaire : $\sigma_\parallel / \sigma_\perp \sim 10^{-4}$.

1.3 Le principe de Curie

Théorème 1.5 (Principe de Curie, 1894). *Lorsque des causes produisent des effets, les éléments de symétrie des causes se retrouvent dans les effets ; la dissymétrie d'un effet doit préexister dans les causes. Formellement : si l'équation $\mathcal{E}[\text{cause}] = \text{effet}$ est covariante sous G et si la cause est invariante sous $H \subset G$, alors l'effet est invariant sous H (sauf brisure spontanée, §1.7).*

Exemple 1.6 (Effet pyroélectrique : le tri des 32 classes). Un cristal peut-il porter une polarisation spontanée $\mathbf{P}$? $\mathbf{P}$ est un vecteur ; il doit être invariant sous tout le groupe ponctuel H du cristal. Si H contient l'inversion $x \mapsto -x$, alors $\mathbf{P} = -\mathbf{P} = 0$. Si H contient deux axes de rotation non parallèles, $\mathbf{P}$ doit être le long des deux : nul. Le tri complet des 32 classes laisse *dix* classes pyroélectriques (dont C_{6v} : la tourmaline). Même raisonnement pour la piézoélectricité (tenseur de rang 3, $d_{ijk} = 0$ dès que $H \ni$ inversion : 20 classes piézoélectriques, dont le quartz).

Application finance / signal

Le principe de Curie est un *théorème de non-arbitrage informationnel* : aucun observable construit covariamment ne peut contenir plus d'asymétrie que ses entrées. En pratique quantitative : un signal de trading construit sur des features symétriques haussier/baissier ne peut pas produire un biais directionnel — si un backtest en produit un, c'est une fuite de données (*lookahead*), pas de l'alpha. Le « détecteur de dissymétrie cachée » est le même raisonnement que pour la pyroélectricité.

1.4 Groupes continus, générateurs, théorème de Noether

Définition 1.7 (Générateur infinitésimal). Pour un groupe à un paramètre $g(\theta)$ agissant sur les fonctions, le *générateur* est $T = -i \frac{d}{d\theta} g(\theta)|_{\theta=0}$, de sorte que $g(\theta) = e^{i\theta T}$.

Exemple 1.8. (a) Translations : $(T_a f)(x) = f(x - a)$, générateur $P = -i\partial_x$ — l'*impulsion* de la mécanique quantique. La formule de Taylor $f(x - a) = e^{-a\partial_x} f(x)$ du chapitre 1 est exactement $T_a = e^{-iaP}$. (b) Rotations de $\mathbb{R}^3$: trois générateurs J_1, J_2, J_3 , $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ — l'algèbre du moment cinétique. (c) $U(1)$: générateur = l'identité ; les représentations irréductibles sont $e^{in\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$ — les séries de Fourier du chapitre 5 sont la théorie des représentations de $U(1)$!

Théorème 1.9 (Noether, version champs). *Soit $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ un lagrangien invariant sous la transformation infinitésimale $\phi \rightarrow \phi + \varepsilon \delta\phi$. Alors le courant*

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \quad (1.1)$$

est conservé sur les solutions : $\partial_\mu j^\mu = 0$, et la charge $Q = \int d^3x j^0$ est constante.

Démonstration. (1) La variation du lagrangien sous $\phi \rightarrow \phi + \varepsilon \delta\phi$ est $\delta\mathcal{L} = \varepsilon \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi \right]$. (2) Sur les solutions, l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$ transforme le crochet en dérivée totale : $\delta\mathcal{L} = \varepsilon \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] = \varepsilon \partial_\mu j^\mu$. (3) L'invariance ($\delta\mathcal{L} = 0$) donne $\partial_\mu j^\mu = 0$; alors $\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \partial_0 j^0 = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ par le théorème de la divergence (chap. 1) si $\mathbf{j}$ décroît à l'infini. $\square$

Symétrie	Groupe	Grandeur conservée
Translation dans le temps	$\mathbb{R}$	énergie
Translations d'espace	$\mathbb{R}^3$	impulsion $\mathbf{p}$
Rotations	$SO(3)$	moment cinétique $\mathbf{J}$
Phase globale du champ	$U(1)$	charge électrique / nombre de particules
Boosts de Lorentz	$SO(3,1)/SO(3)$	mouvement du centre d'énergie

TABLE 1.1 – Le dictionnaire de Noether.

Exemple 1.10 (Le courant de probabilité de Schrödinger). Le lagrangien de Schrödinger $\mathcal{L} = i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - V|\psi|^2$ est invariant sous la phase *globale* $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$. Le courant de Noether (1.1) est

$$j^0 = |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*),$$

soit exactement la densité et le courant de probabilité : la conservation de la probabilité *est* la symétrie $U(1)$. C'est le point de départ de l'exemple suivant — que se passe-t-il si l'on rend α *locale* ?

1.5 L'invariance de jauge : de $U(1)$ global à l'électrodynamique

C'est le raisonnement le plus fécond de la physique du XX^e siècle, et il tient en une page.

Idée-clé

Exiger que la symétrie de phase $\psi \rightarrow e^{ie\alpha} \psi$ reste une symétrie quand $\alpha = \alpha(x)$ dépend du point — une *jauge locale* — *force* l'existence d'un champ vecteur A_μ , dicte son couplage à la matière, et impose sa dynamique de Maxwell. La lumière n'est pas ajoutée à la théorie : elle est *déduite* de la symétrie.

Théorème 1.11 (Construction du couplage minimal). Soit $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ le lagrangien de Dirac libre, invariant sous $\psi \rightarrow e^{ie\alpha} \psi$ global. Sous une transformation locale $\alpha(x)$: (1) le terme cinétique n'est plus invariant : $\partial_\mu(e^{ie\alpha}\psi) = e^{ie\alpha}(\partial_\mu + ie\partial_\mu\alpha)\psi$, d'où $\delta\mathcal{L}_0 = -e\psi\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha$. (2) On restaure l'invariance en introduisant A_μ et la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha, \quad (1.2)$$

car alors $D'_\mu\psi' = e^{ie\alpha}D_\mu\psi$: le lagrangien $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$ est invariant de jauge. (3) Le développement fait apparaître le couplage courant-champ : $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ — le vertex de l'électrodynamique quantique. (4) La dynamique de A_μ doit être elle-même invariante de jauge : le seul invariant quadratique en ∂A est $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ contracté avec lui-même, d'où $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ — les équations de Maxwell (chap. 2).

Intuition

La dérivée covariante (1.2) est un *transport parallèle* : comparer $\psi(x+dx)$ à $\psi(x)$ n'a de sens que si l'on précise comment transporter la phase d'un point à l'autre — c'est le rôle de A_μ , exactement comme la connexion de Christoffel transporte les vecteurs en géométrie riemannienne. La jauge est une *géométrie* du fibré des phases.

Application physique

Vers QCD. Remplacer $U(1)$ par $SU(3)$ (trois « couleurs », ψ triplet) reproduit mot pour mot la construction : $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$ avec huit gluons A_μ^a ($a = 1, \dots, 8$). La seule nouveauté est que $[T^a, T^b] \neq 0$: le tenseur $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ contient un terme quadratique — les gluons interagissent entre eux. Cette self-interaction change le signe de la fonction β (chap. 16) : c'est la *liberté asymptotique*, $\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f)\ln(\mu^2/\Lambda^2)}$, qui décroît à haute énergie précisément parce que $11N_c > 2N_f$.

1.6 Représentations : pourquoi les niveaux se dégènèrent

Définition 1.12 (Représentation). Une *représentation* de G sur un espace vectoriel V est un morphisme $D : G \rightarrow GL(V) : D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2)$. Elle est *irréductible* si V n'a pas de sous-espace invariant propre. Le *caractère* est $\chi(g) = \text{Tr } D(g)$.

Théorème 1.13 (Schur et dégénérescences). *Si H commute avec tous les $D(g)$ d'une représentation irréductible de dimension n , alors $H = \lambda \mathbf{1}$ sur cet espace. Par conséquent : les niveaux d'énergie d'un hamiltonien de groupe de symétrie G se rangent par représentations irréductibles de G , avec une dégénérescence égale à la dimension de la représentation.*

Exemple 1.14 (Table de caractères de D_3 et niveaux de NH_3). D_3 a trois classes de conjugaison (e ; $\{r, r^2\}$; $\{\sigma_i\}$) donc trois représentations irréductibles, de dimensions 1, 1, 2 (car $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = |G|$) :

D_3	e	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

Tout niveau électronique ou vibrationnel de NH_3 est donc soit non dégénéré (A_1, A_2), soit *doublement* dégénéré (E) — jamais triplement. Une dégénérescence triple observée signifierait une symétrie cachée plus grande. C'est l'explication de la structure de *tous* les spectres moléculaires.

Exemple 1.15 (Modes de vibration de la molécule d'eau). H_2O a le groupe $C_{2v} = \{e, C_2, \sigma_v, \sigma'_v\}$ (4 éléments, abélien : 4 représentations de dimension 1 notées A_1, A_2, B_1, B_2). Les 9 degrés de liberté (3 atomes $\times 3$) se décomposent en $3A_1 \oplus A_2 \oplus 3B_1 \oplus 2B_2$; en retranchant translations ($A_1 \oplus B_1 \oplus B_2$) et rotations ($A_2 \oplus B_1 \oplus B_2$), il reste

$$\Gamma_{\text{vib}} = 2A_1 \oplus B_1 :$$

trois modes de vibration, tous non dégénérés : l'étirement symétrique (A_1 , 3657 cm^{-1}), le pliage (A_1 , 1595 cm^{-1}) et l'étirement antisymétrique (B_1 , 3756 cm^{-1}) — ceux-là mêmes qui absorbent l'infrarouge et font de H_2O le gaz à effet de serre dominant. Le TD 17 du notebook calcule ces modes numériquement et vérifie leur classification par symétrie.

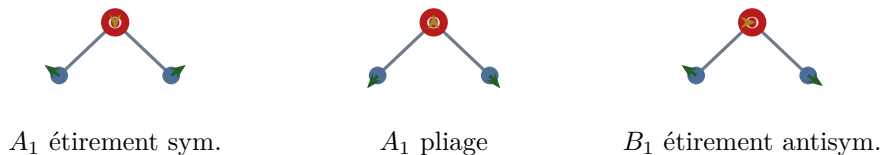


FIGURE 1.2 – Les trois modes normaux de H_2O , classés par les représentations irréductibles de C_{2v} (exemple 1.15). La symétrie prédit le *nombre* de modes et leurs *dégénérescences* avant tout calcul de constante de raideur.

1.7 Brisure spontanée de symétrie et théorème de Goldstone

Définition 1.16 (Brisure spontanée). Une symétrie G du hamiltonien (ou de l'action) est *spontanément brisée* si l'état d'équilibre (fondamental, ou mesure de Gibbs en volume infini) n'est pas invariant sous G : H est symétrique, l'état ne l'est pas.

Exemple 1.17 (Le flambage d'Euler : la brisure $\mathbb{Z}_2$ mécanique). Une tige verticale comprimée par une force F le long de son axe : le problème est invariant par la réflexion gauche/droite. Pour $F < F_c = \pi^2 EI/L^2$ (charge critique d'Euler), la tige reste droite (état symétrique). Pour $F > F_c$, l'état droit devient instable : la tige flambe à gauche ou à droite, brisant la symétrie. L'énergie en fonction de la flèche x passe de $V(x) \simeq a(F_c - F)x^2 + bx^4$ avec minimum unique en 0, à un double puits $x_{\pm} = \pm \sqrt{a(F - F_c)/2b}$: le paramètre d'ordre croît comme $(F - F_c)^{1/2}$ — l'exposant champ moyen $\beta = 1/2$ du chapitre 10, dans une expérience de mécanique que l'on peut faire avec une règle en plastique.

Théorème 1.18 (Goldstone). *Si une symétrie continue G est spontanément brisée vers un sous-groupe H , il existe autant d'excitations de masse nulle (modes de Goldstone) que de générateurs brisés, $\dim G - \dim H$.*

Schéma de preuve. Le potentiel $V(\phi)$ est invariant : $V(g\phi) = V(\phi)$. En dérivant le long d'une direction brisée T^a au minimum ϕ_0 : $\partial_i V(\phi_0) (T^a \phi_0)_i = 0$, puis en redérivant : $\partial_i \partial_j V(\phi_0) (T^a \phi_0)_j = 0$. La matrice de masse $M_{ij}^2 = \partial_i \partial_j V(\phi_0)$ possède donc le vecteur propre $T^a \phi_0 \neq 0$ de valeur propre nulle, pour chaque générateur brisé. Preuve complète (avec les hypothèses de localité) : [6]. $\square$

Application physique

Trois Goldstone célèbres. (a) Aimant de Heisenberg : $SO(3) \rightarrow SO(2)$, deux générateurs brisés : les ondes de spin (magnons), $\omega \propto k^2$. (b) Superfluide : $U(1)$ de phase brisée par le condensat : le phonon de Bogoliubov du chapitre 14, $\omega = ck$. (c) Cristal : translations continues brisées vers le réseau discret : les phonons acoustiques — trois branches $\omega \rightarrow 0$, une par générateur de translation brisé. La rigidité même des solides est un phénomène de brisure spontanée.

Au notebook compagnon

TD 17. Modes de vibration d'une molécule triangulaire (D_3) : diagonalisation de la matrice dynamique, classification des modes par les caractères de D_3 (animation des modes normaux) ; brisure de symétrie sur le chapeau mexicain : animation du mode de Goldstone (plat) vs mode radial (massif), et vérification numérique de $\omega_{\text{Goldstone}} \rightarrow 0$. Optimisation du minimum par `optimizr.differential_evolution`.

1.8 Exercices corrigés

Exercice 17.1 (*) — Pseudovecteurs au miroir

Le moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ d'une toupie pointe vers le haut. Que devient $\mathbf{L}$ dans un miroir vertical ? Et le champ $\mathbf{B}$ d'une spire horizontale ?

Solution détaillée

Sous la réflexion $x \mapsto -x$ (miroir yz) : $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$ changent leur composante x ; le produit vectoriel $\mathbf{L}$ change ses composantes y, z — une toupie verticale ($\mathbf{L} = L\hat{z}$) devient $-L\hat{z}$ apparent... non : L_z change de signe car $L_z = xp_y - yp_x \mapsto -xp_y + yp_x$... Calcul propre : $L_x \mapsto L_x, L_y \mapsto -L_y, L_z \mapsto -L_z$. La toupie d'axe $\hat{z}$ tourne dans l'autre sens dans le miroir, conformément à l'image intuitive. $\mathbf{B}$ suit la même loi (pseudovecteur) : une spire dans le plan du miroir a son $\mathbf{B}$ inversé. C'est la signature opérationnelle d'un pseudovecteur : il se transforme comme une circulation, pas comme une flèche.

Exercice 17.2 (★★) — Règle de sélection dipolaire

Montrer par le principe de Curie que la transition dipolaire électrique entre deux états de même parité est interdite.

Solution détaillée

L'élément de matrice est $\mathbf{d}_{fi} = \langle \psi_f, \mathbf{e} \mathbf{r} \psi_i \rangle$. Sous parité $P : \mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$, $\psi_{i,f} \mapsto \pi_{i,f} \psi_{i,f}$ avec $\pi = \pm 1$. L'intégrale $\int \psi_f^* \mathbf{r} \psi_i d^3x$ se transforme en $-\pi_f \pi_i$ fois elle-même (changement de variables $x \rightarrow -x$, jacobien 1, chap. 1). Si $\pi_f \pi_i = +1$, alors $\mathbf{d}_{fi} = -\mathbf{d}_{fi} = 0$: transition interdite. D'où la règle $\Delta\ell = \pm 1$ des spectres atomiques (les harmoniques sphériques ont la parité $(-1)^\ell$) : la raie Lyman- α ($2p \rightarrow 1s$) est permise, $2s \rightarrow 1s$ est interdite — l'état $2s$ est métastable ($\tau \sim 0,12\text{s}$ contre $1,6\text{ns}$ pour $2p$).

Exercice 17.3 (★★) — Charge de Noether du champ complexe

Pour $\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2$ avec ϕ complexe, calculer le courant de Noether de $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$ et vérifier sa conservation sur les équations du mouvement.

Solution détaillée

$\delta\phi = i\phi$, $\delta\phi^* = -i\phi^*$; le courant (1.1) (sommé sur les deux champs indépendants) : $j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$. Divergence : $\partial_\mu j^\mu = i(\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^*)$; les équations de Klein-Gordon $\square \phi = -m^2 \phi$ et sa conjuguée donnent $i(-m^2 |\phi|^2 + m^2 |\phi|^2) = 0$. ✓ C'est la charge électrique portée par un champ scalaire chargé (pions $\pi^\pm$).

Exercice 17.4 (★★★) — Comptage de Goldstone en QCD

La symétrie chirale de QCD à deux saveurs, $SU(2)_L \times SU(2)_R$, est spontanément brisée vers le sous-groupe vectoriel $SU(2)_V$ par le condensat $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$. Combien de bosons de Goldstone ? Les identifier, et expliquer pourquoi ils ne sont pas exactement de masse nulle.

Solution détaillée

$\dim[SU(2) \times SU(2)] = 3 + 3 = 6$, $\dim SU(2)_V = 3$: trois générateurs brisés (les axiaux), donc **trois** Goldstone — les trois pions π^+, π^0, π^- , effectivement les hadrons les plus légers ($m_\pi \approx 140\text{MeV}$ contre $m_p \approx 938\text{MeV}$). Ils ne sont pas strictement de masse nulle car la symétrie chirale n'est qu'*approchée* : les masses nues des quarks u, d la brisent explicitement, donnant $m_\pi^2 \propto (m_u + m_d) \langle \bar{q}q \rangle / f_\pi^2$ (relation de Gell-Mann–Oakes–Renner) : des *pseudo*-Goldstone. Le même schéma (G/H + brisure explicite faible) décrit les magnons dans un champ extérieur et le mode de phase d'un supraconducteur.

Chapitre 2

Relativité restreinte et électromagnétisme covariant

Ce chapitre transpose le cours d'A. Comtet *Relativité et électromagnétisme* dans notre langage. La relativité restreinte est l'exemple parfait du programme du chapitre 1 : postuler un groupe de symétrie (Lorentz–Poincaré) et *en déduire* la cinématique, la dynamique, et la forme des équations de Maxwell. Les fonctions de Green du d'Alembertien (chap. 9) y deviennent les potentiels retardés, et le tenseur énergie-impulsion prépare le terrain de la réponse linéaire (chap. 15).

Prérequis / rappel

Chapitre 9 (équation des ondes, d'Alembertien, propagation à vitesse finie) ; chapitre 7 (fonctions de Green) ; chapitre 1 (groupes, générateurs, tenseurs). Conventions : métrique $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, indices grecs 0..3, sommation d'Einstein, unités où c est gardé explicite.

2.1 L'intervalle, structure causale, temps propre

Définition 2.1 (Intervalle). Entre deux événements $(t, \mathbf{x})$ et $(t + dt, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$, l'*intervalle*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\mathbf{x}|^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

est postulé invariant par changement de référentiel inertiel — c'est le contenu géométrique de la constance de la vitesse de la lumière. $ds^2 > 0$: genre *temps* (causalement reliables) ; $ds^2 < 0$: genre *espace* (simultanéité relative) ; $ds^2 = 0$: genre *lumière* (cône).

Définition 2.2 (Temps propre). Le long d'une ligne d'univers de vitesse $\mathbf{v}(t)$, le *temps propre* est $d\tau = ds/c = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = dt/\gamma$: c'est le temps que mesure l'horloge embarquée.

Exemple 2.3 (Les muons cosmiques, ou la relativité vérifiée à 2000 m d'altitude). Un muon de rayon cosmique a une durée de vie propre $\tau_0 = 2,2\mu\text{s}$: à $v \approx c$ il parcourrait $c\tau_0 \approx 660\text{ m}$ — il ne devrait jamais atteindre le sol depuis les $\sim 15\text{ km}$ où il est créé. Or on en détecte $\sim 1/\text{cm}^2/\text{minute}$ au niveau de la mer. Explication : à $E = 3\text{ GeV}$, $\gamma = E/m_\mu c^2 \approx 28$, la durée de vie *au sol* est $\gamma\tau_0 \approx 62\mu\text{s}$, soit $18,5\text{ km}$ de portée. Dans le référentiel du muon, c'est l'*atmosphère* qui est contractée de 15 km à 540 m : les deux descriptions (dilatation du temps / contraction des longueurs) sont le même invariant (2.1) lu dans deux référentiels. L'expérience de Frisch–Smith (1963) mesure le rapport de flux et confirme γ à quelques pour cent.

2.2 Transformations de Lorentz et diagrammes de Minkowski

Théorème 2.4 (Boost spécial). *La transformation linéaire préservant (2.1) et emmenant un référentiel à la vitesse $v\hat{x}$ est, avec $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$:*

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2.2)$$

En posant la rapidité $\varphi = \operatorname{artanh} \beta$, le boost s'écrit comme une « rotation hyperbolique » $ct' = ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi$, $x' = x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi$: les rapidités s'ajoutent (composition des vitesses $\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$).

Démonstration. **(1)** Linéarité : l'homogénéité de l'espace-temps impose des transformations affines ; on fixe l'origine. **(2)** Invariance de $c^2 t^2 - x^2$: la forme quadratique de signature (1, 1) est préservée par les matrices $\begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$ (l'analogue hyperbolique des rotations, chap. 1 : c'est le groupe $SO(1, 1)$). **(3)** L'origine de R' ($x' = 0$) se meut à $x = vt$: $\tanh \varphi = \beta$. La composition des boosts est l'addition des φ (composition dans le groupe à un paramètre), d'où la loi des vitesses par $\tanh(\varphi_1 + \varphi_2)$. $\square$

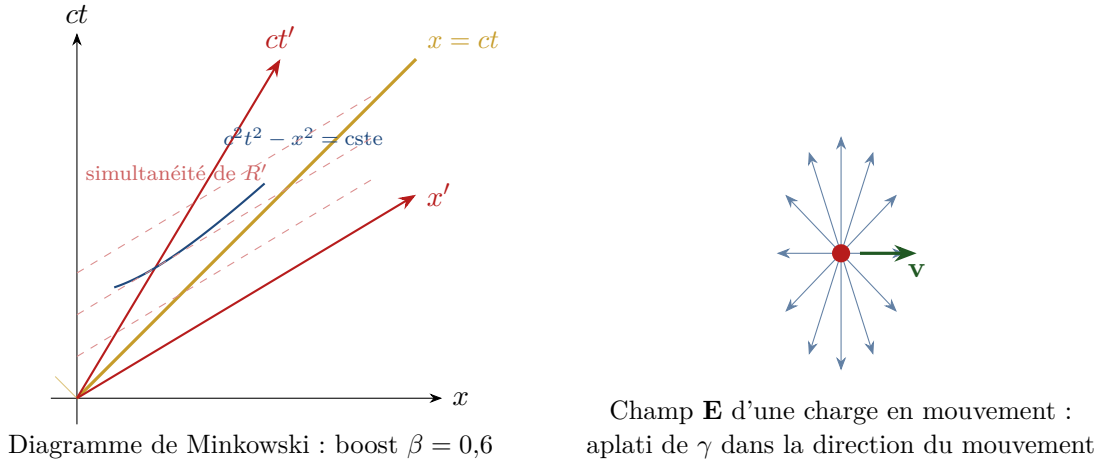


FIGURE 2.1 – Gauche : diagramme de Minkowski d'un boost — axes obliques, lignes de simultanéité inclinées, hyperboles de calibration (invariance de l'intervalle). Droite : le champ coulombien d'une charge rapide, comprimé transversalement (§2.5, TD 18 animé).

Exemple 2.5 (GPS : quand les deux relativités se disputent $38 \mu\text{s/jour}$). Les horloges des satellites GPS ($v \approx 3,9 \text{ km/s}$, $h \approx 20\,200 \text{ km}$) dérivent par rapport au sol de deux effets : la dilatation spéciale $-\frac{v^2}{2c^2} \approx -7,2 \mu\text{s/jour}$ (l'horloge en orbite retarde), et le décalage gravitationnel $+\frac{\Delta\Phi}{c^2} \approx +45,9 \mu\text{s/jour}$ (elle avance, étant plus haut dans le potentiel). Bilan $+38,7 \mu\text{s/jour}$: sans correction, l'erreur de positionnement croîtrait de $c \times 38 \mu\text{s} \approx 11,6 \text{ km par jour}$. Les horloges embarquées sont dégonflées en fréquence de $\Delta f/f = -4,465 \times 10^{-10}$ avant le lancement : la relativité est une contrainte d'ingénierie quotidienne.

2.3 Quadrivecteurs, dynamique, collisions

Définition 2.6 (Quadrivitesse, quadri-impulsion). $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \mathbf{v})$, de norme $u^\mu u_\mu = c^2$; $p^\mu = m u^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ avec $E = \gamma m c^2$, $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, et l'invariant fondamental

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2. \quad (2.3)$$

Pour un photon, $m = 0$: $E = |\mathbf{p}|c = \hbar\omega$.

Exemple 2.7 (Effet Compton — la cinématique qui prouva le photon). Photon (k^μ) sur électron au repos (p^μ) ; état final k'^μ , p'^μ . Conservation $k + p = k' + p'$, donc $(k + p - k')^2 = p'^2 = m^2 c^2$. En développant avec $k^2 = k'^2 = 0$ et $k \cdot p = E_\gamma mc$, $k' \cdot p = E'_\gamma mc$, $k \cdot k' = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2} (1 - \cos \theta)$:

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1 - \cos \theta}{mc^2} \iff \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta), \quad (2.4)$$

avec $h/mc = 2,43 \text{ pm}$ (longueur d'onde Compton). La mesure de Compton (1923) sur le molybdène ($\lambda = 71 \text{ pm}$) montre le décalage à $\theta = 90^\circ$ exactement égal à $2,4 \text{ pm}$: la lumière transporte une impulsion quantifiée. Le TD 18 trace $E'_\gamma(\theta)$ et la section efficace de Klein–Nishina.

Exemple 2.8 (Seuil de production : pourquoi le LHC est un collisionneur). Créer une paire $p\bar{p}$ sur cible fixe ($p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$) demande, dans le centre de masse, $\sqrt{s} \geq 4mc^2$. Or sur cible fixe, $s = (p_1 + p_2)^2 = 2m^2 c^2 + 2mE_{\text{lab}}$: il faut $E_{\text{lab}} \geq \frac{(4mc^2)^2 - 2m^2 c^4}{2mc^2} = 7mc^2 \approx 6,6 \text{ GeV}$ (l'expérience du Bévatron, antiproton 1955). En collisionneur symétrique, $\sqrt{s} = 2E$: toute l'énergie compte. À énergie de faisceau égale E , le gain est $\sqrt{s}_{\text{coll}}/\sqrt{s}_{\text{fixe}} \sim \sqrt{2E/mc^2}$: pour le LHC ($E = 7 \text{ TeV}$), un facteur ~ 85 — c'est l'invariant s qui dicte l'architecture des accélérateurs.

2.4 Le tenseur électromagnétique et les équations de Maxwell

Définition 2.9 (Tenseur de Faraday). À partir du quadripotential $A^\mu = (\Phi/c, \mathbf{A})$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{0i} = E_i/c, \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k. \quad (2.5)$$

F est invariant de jauge ($A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$, chap. 1, éq. (1.2)).

Théorème 2.10 (Maxwell covariant). Les quatre équations de Maxwell s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad \text{et} \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}), \quad (2.6)$$

avec $j^\nu = (\rho c, \mathbf{j})$. La conservation de la charge $\partial_\nu j^\nu = 0$ est automatique (antisymétrie de F) ; en jauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, elles se réduisent à $\square A^\nu = \mu_0 j^\nu$ — l'équation des ondes du chapitre 9, composante par composante.

Démonstration. (1) $\nu = 0$ de la première : $\partial_i F^{i0} = \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \rho c$, soit $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ (Gauss). (2) $\nu = j$: $\frac{1}{c} \partial_t F^{0j} + \partial_i F^{ij} = -\frac{1}{c^2} \partial_t E_j + (\nabla \times \mathbf{B})_j = \mu_0 j_j$ (Ampère–Maxwell). (3) L'identité de Bianchi $\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$ (conséquence directe de (2.5), dérivées croisées, chap. 1) équivaut à la seconde équation : composantes = Faraday et $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. (4) $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ par antisymétrie : $\partial_\nu j^\nu = 0$ — la charge est conservée parce que F dérive d'un potentiel : Noether encore (exemple du chap. 1). $\square$

Idée-clé

Il n'y a que deux invariants de Lorentz quadratiques du champ :

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = B^2 - \frac{E^2}{c^2} \quad (\text{scalaire}), \quad -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{c} \quad (\text{pseudoscalaire}).$$

Conséquences immédiates : si $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ et $E = cB$ dans un référentiel (onde plane), c'est vrai dans tous ; on ne peut pas « rattraper » une onde lumineuse pour la voir statique. Le pseudoscalaire $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ est le terme θ des théories de jauge topologiques (axions, isolants topologiques).

2.5 Transformation des champs : le faisceau qui devient aimant

Sous le boost (2.2), $F' = \Lambda F \Lambda^T$ donne :

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}, \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}\right)_{\perp}. \quad (2.7)$$

Exemple 2.11 (Le champ d'une charge ultrarelativiste : une « crêpe » de champ). Charge q au repos : champ coulombien isotrope. Vue depuis un référentiel où elle file à v : par (2.7), le champ transverse est amplifié de γ , le champ longitudinal inchangé ; le calcul complet donne

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \mathbf{r}}{(\gamma^2 r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2)^{3/2}} :$$

le champ se concentre dans un disque d'ouverture angulaire $\sim 1/\gamma$ autour du plan transverse (fig. 2.1, droite), accompagné d'un champ magnétique azimutal $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}$. À très grand γ , ce champ ressemble à une impulsion de rayonnement : c'est l'approximation des *photons équivalents* de Weizsäcker–Williams, utilisée en QED/QCD pour traiter un faisceau de particules chargées comme un flux de photons quasi réels — le point de départ des processus photon–photon au LHC. Le TD 18 *anime* l'aplatissement des lignes de champ quand β croît.

Exemple 2.12 (L'aimantation d'un fil neutre : le magnétisme comme effet relativiste). Un fil parcouru par un courant I est neutre dans le référentiel du laboratoire : une charge test q immobile ne subit que $\mathbf{B}$ azimutal, sans force. Si q avance à v le long du fil : dans *son* référentiel, les densités linéiques d'ions et d'électrons subissent des contractions de Lorentz *différentes* (les porteurs bougent, pas les ions) : le fil paraît chargé, $\lambda' = -\gamma\lambda_0\beta\beta_e$, et attire (ou repousse) la charge par un champ *électrique* radial. La force calculée est exactement $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ du laboratoire : *la force magnétique est la force électrostatique vue du mauvais référentiel*, au premier ordre en v/c . Le magnétisme quotidien (moteurs, aimants) est un effet relativiste visible parce que les densités de charges dans un métal sont énormes ($\sim 10^{28} \text{ e}^-/\text{m}^3$) : la neutralité se brise à 10^{-23} près, mais multipliée par 10^{28} ...

2.6 Potentiels retardés, Liénard–Wiechert, rayonnement

En jauge de Lorenz, $\square A^{\nu} = \mu_0 j^{\nu}$: c'est le chapitre 9. La fonction de Green *retardée* du d'Alembertien en dimension 3 + 1,

$$G_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right), \quad (2.8)$$

(support *sur* le cône de lumière : principe de Huygens) donne par convolution (chap. 4) les *potentiels retardés* :

$$A^{\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j^{\nu}\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}, \mathbf{y}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3y. \quad (2.9)$$

Application physique

Larmor et le synchrotron. Pour une charge ponctuelle, (2.9) donne les potentiels de Liénard–Wiechert, et le champ de rayonnement (en $1/r$) conduit à la puissance de Larmor relativiste $P = \frac{q^2\gamma^6}{6\pi\epsilon_0 c^3} [\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2/c^2]$. Sur une orbite circulaire, $P \propto \gamma^4/R^2$: c'est pourquoi le LEP ($e^{\pm}$, $\gamma \sim 2 \times 10^5$) perdait $\sim 3 \text{ GeV}$ par tour et pourquoi le LHC utilise des protons (γ 2000 fois plus petit à énergie égale : 10^{13} fois moins de rayonnement). Même formule, autre lecture : la lumière synchrotron, concentrée dans le cône $1/\gamma$ de l'exemple 2.11, est la source de rayons X la plus brillante disponible (SOLEIL, ESRF).

Attention — piège classique

La fonction de Green *avancée* $G_{\text{av}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(t + |\mathbf{x}|/c)$ résout aussi $\square G = \delta$: le choix retardé est un choix de *conditions aux limites* (causalité), pas une conséquence des équations. C'est le même choix qui, au chapitre 15, rend la susceptibilité analytique dans le demi-plan supérieur (Kramers–Kronig) : causalité = analyticité, dans les deux contextes.

Au notebook comp  gnon

TD 18. Diagramme de Minkowski *animé* (boost variable : axes, simultanéité, invariance de l'hyperbole) ; champ d'une charge boostée (*animation* de l'aplatissement $1/\gamma$ des lignes de champ,   q. (2.7)) ; effet Compton : $E'_\gamma(\theta)$ et vérification de (2.4) ; puissance synchrotron $\propto \gamma^4$. Ajustement de γ optimal par `optimizr.differential_evolution` sur la perte par tour.

2.7 Exercices corrigés**Exercice 18.1 (  ) — Composition des vitesses**

Un vaisseau à $0,8c$ tire un projectile à $0,8c$ vers l'avant. Vitesse du projectile pour l'observateur fixe ? Et avec dix étages de $0,8c$?

Solution détaillée

$\beta = \frac{0,8+0,8}{1+0,64} = \frac{1,6}{1,64} = 0,9756$. Avec les rapidités : $\varphi = \text{artanh}(0,8) = 1,0986$, dix étages $\Rightarrow \varphi_{10} = 10,986$, $\beta_{10} = \tanh(10,986) = 1 - 6 \times 10^{-10}$: on approche c exponentiellement sans jamais l'atteindre — la structure de groupe (addition des rapidités, th  m. 2.4) rend le calcul trivial.

Exercice 18.2 (    ) — Invariants du champ

Une onde plane a $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, $E = cB$. Peut-on trouver un référentiel où le champ est purement électrique ? Purement magnétique ? Et pour le champ d'un condensateur ($\mathbf{B} = 0$) ?

Solution détaillée

Les deux invariants de l'onde sont nuls : $B^2 - E^2/c^2 = 0$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Un champ purement électrique aurait $B'^2 - E'^2/c^2 = -E'^2/c^2 < 0 \neq 0$: impossible ; de même purement magnétique (> 0) : l'onde reste une onde dans tous les référentiels. Pour le condensateur : $B^2 - E^2/c^2 < 0$; on peut annuler $\mathbf{B}'$ (déjà nul) mais jamais $\mathbf{E}'$; réciproquement un champ purement magnétique (aimant) ne peut jamais devenir purement électrique. Le signe de $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ trie les champs en trois classes non communicantes.

Exercice 18.3 (    ) — Effet Doppler relativiste

  tablir $\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta)$ à partir de l'invariance de la phase $k_\mu x^\mu$, et retrouver le décalage transverse ($\theta = 90^\circ$).

Solution détaillée

La phase $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_\mu x^\mu$ est un scalaire (nombre de crêtes comptées : invariant). Donc $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ est un quadrivecteur ; le boost (2.2) sur k^0 donne $\omega' = \gamma(\omega - vk_x) = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta)$. À $\theta = 90^\circ$: $\omega' = \gamma\omega > \omega$ — décalage *transverse*, pur effet de dilatation du temps, sans analogue classique ; mesuré par Ives–Stilwell (1938) sur des raies de l'hydrogène, précision moderne 10^{-8} (piégeage d'ions). C'est l'effet qui décale le fond diffus cosmologique en dipôle ($v_\odot \approx 370$ km/s).

Exercice 18.4 (★★★) — Tenseur énergie-impulsion et pression de radiation

Le tenseur énergie-impulsion du champ EM est $T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})$. Calculer T^{00} et T^{0i} , puis la pression exercée par une onde plane sur un miroir parfait.

Solution détaillée

(1) $T^{00} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = u$ (densité d'énergie) ; $T^{0i} = \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = S_i/c$ (vecteur de Poynting) : l'énergie et son flux sont les composantes d'un même tenseur — c'est lui qui source la gravitation (mémoire warp, Partie VIII). (2) Pour l'onde plane, $u = \varepsilon_0 E^2$, $|S| = cu$: le flux d'impulsion est $T^{xx} = u$. Miroir parfait : l'onde repart, transfert d'impulsion doublé, $P_{\text{rad}} = 2u = \frac{2I}{c}$. Application numérique : plein soleil $I = 1 \text{ kW/m}^2 \Rightarrow P_{\text{rad}} = 6,7 \mu\text{Pa}$ — d'où les voiles solaires : IKAROS (2010, JAXA), 196 m^2 , poussée $\sim 1,1 \text{ mN}$, première navigation photonique interplanétaire réelle. (Comparer au brevet analysé dans le mémoire compagnon : ici la pression de radiation est *réellement* la force disponible, et elle est micro-newtonienne.)